

**Viabilité et Développement  
Durable**

M.-H. Durand, S. Martin,  
P. Saint-Pierre

G-2010-29

Mai 2010



# Viabilité et Développement Durable

**Marie-Hélène Durand**

*IRD*  
*93143 Bondy Cedex, France*  
marie-helene.durand@ird.fr

**Sophie Martin**

*CEMAGREF-LISC*  
*63172 Aubière Cedex, France*  
sophie.martin@clermont.cemagref.fr

**Patrick Saint-Pierre**

*SDFi-CRVJC Université Paris Dauphine et LASTRE*  
*France*  
patrick.saint.pierre@gmail.com

Mai 2010

*Les Cahiers du GERAD*

G-2010-29

Copyright © 2010 GERAD



### Résumé

Cet article présente l'utilisation qu'il est possible de faire des outils de la viabilité dans le cadre des modèles macroéconomiques de développement durable. Il montre que l'approche viabilité ne se réduit pas à la seule considération du respect des contraintes mais peut servir également à traiter de problèmes d'optimisation inter-temporelle. Cet outil mathématique offre un moyen de répondre à des questions posées, concevoir celles-ci de façon pertinente dans un modèle sous-jacent est une étape préalable, sans doute la plus difficile. En se basant sur un modèle économique classiquement utilisé, une nouvelle façon d'évaluer l'équité intergénérationnelle est proposée.

### Abstract

This paper describes some benefits provided by the use of viability theory tools for studying sustainable development issues within macroeconomic models. It shows that the viability approach encompasses not only constraint satisfaction but also inter-temporal optimisation problem resolution. This paper also reveals that the model is crucial : such mathematical tools provide means of answering questions, if they are well-posed. Using a usual model of economic sustainability, a new way to measure intergenerational equity is proposed.

**Remerciements :** Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet financé par l'ANR-Agriculture et Développement Durable - DEDUCTION et, pour partie, effectué lors de séjours au GERAD du troisième auteur.



# 1 Introduction

Les 20 dernières années témoignent d'une importante prise de conscience des problèmes environnementaux et des changements globaux induits, et non contrôlés, par l'activité humaine. Ces dommages environnementaux, susceptibles d'entraver la capacité des générations futures, sinon actuelles, à assurer leur bien-être sont maintenant une préoccupation première et le « développement durable » censé remédier à cette sombre perspective est perçu comme un défi. Le développement durable qui sous-entend à la fois efficacité économique, équité intergénérationnelle et préservation des fonctions écologiques peut difficilement être divisé en problématiques séparées mais il est difficile de l'aborder dans sa globalité. Revendiqué dans une grande variété de contextes, c'est un thème transversal à de nombreuses disciplines qui le traduisent et le définissent dans des perspectives différentes et ces travaux sont difficilement commensurables. Le point de vue de cet article concerne les modèles macroéconomiques de développement durable, il reprend une communication faite lors d'un colloque sur les nouvelles lectures théoriques et innovations méthodologiques de la problématique du développement durable<sup>1</sup>.

Il est de plus en plus fréquent de voir les mots « développement viable » et « développement durable » associés ou pris dans la même acception. La viabilité est également un concept polysémique, signifiant la capacité d'une entité à survivre, dont le sens est proche de celui de durabilité. La viabilité économique d'un projet ou d'une entreprise est un terme du langage courant tandis que la viabilité d'une cellule ou d'un tissu a un sens précis en biologie. Il y a une vingtaine d'années, deux champs de recherche revendiquant l'appellation viabilité ont été développés. Il s'agit, en écologie, de *Population Viability Analysis*, une méthode d'analyse statistique d'évaluation de la capacité de survie des espèces menacées et, en mathématiques, de la théorie de la viabilité, consacrée à l'étude de la régulation des systèmes dynamiques sous contraintes.

C'est à celle-ci que nous faisons référence ici et à son utilisation dans les modèles économiques du développement durable. La théorie mathématique de la viabilité suscite un certain engouement auprès des chercheurs en sciences de l'environnement ou en sciences sociales, domaines pour lesquels elle a été conçue, mais elle s'applique également à bien d'autres domaines y compris la physique. Le succès de cette théorie provient de sa capacité à mobiliser des métaphores très suggestives et à représenter des concepts pertinents. A la différence de méthodes plus classiques, elle permet d'étudier les systèmes dynamiques non pas en recherchant « une solution optimale » à partir d'un critère posé a priori mais d'abord en termes de respect des contraintes à chaque instant et de décisions prises à temps et considère l'adaptation des évolutions sans préjuger du futur.

Les concepts de base ont été popularisés dans de nombreux articles (Aubin, 1996, Aubin et Saint-Pierre, 2005, Aubin et Saint-Pierre, 2007, Aubin, 2010), et l'arsenal mathématique a été développé dans plusieurs ouvrages (Aubin, 1991, Aubin, 1997, Aubin et al., 2010, DeLara et Doyen, 2008). Pour ce qui concerne les problèmes de développement durable, de nombreuses applications de la théorie de la viabilité ont été faites dans les domaines de la gestion des ressources renouvelables (Béné et al., 2001, Bonneuil, 2003, Doyen et Béné, 2003, Tichit et al., 2004, Rapaport et al., 2006, Aubin et Saint-Pierre, 2007, Doyen et al., 2007, DeLara et al., 2007, Martinet et al., 2007, Béné et Doyen, 2008, Tichit et al., 2007), du changement climatique (Aubin et al., 2004, Bernardo, 2008, Doyen et al., 2008), de la résilience écologique (Martin, 2004, Martin, 2005), de la démographie (Bonneuil, 2000, Bonneuil et Saint-Pierre, 2008).

Dans ce travail nous présentons quelques exemples d'utilisation des outils de la viabilité pour l'analyse économique du développement durable. Cette illustration est faite dans le cadre traditionnel des modèles de croissance néoclassiques, celui d'une « cake eating » économie, issu de celui de Ramsey (1928) destiné à étudier le mode de répartition entre les générations de l'épargne et de la consommation permettant d'atteindre un équilibre stable de croissance optimale. Ce modèle a été repris par Hotelling (1931), Hartwick (1977), Solow (1974), Dasgupta et Heal (1974) pour explorer les conditions d'existence d'une solution à ce problème en présence d'une ressource finie, le développement durable étant défini comme une question de partage entre les générations d'une ressource commune (et rare) et de la possibilité, ou non, de maintenir indéfiniment un certain niveau de vie, autrement dit une question de conflit d'intérêts, entre générations, sur le mode de gestion d'une base de ressources. Ces modèles canoniques servent de support aux recherches économiques

<sup>1</sup>Colloque « La problématique du développement durable vingt ans après : nouvelles lectures théoriques, innovations méthodologiques et domaines d'extension », 20-22 novembre 2008, Clersé, Université de Lille.

sur le développement durable considéré comme une obligation de partage équitable et de justice entre des générations qui se succèdent à l'infini et dont le « bien-être » ne doit pas être mis en cause par les actions de générations précédentes.

La théorie de la viabilité est perçue comme une méthode prometteuse mettant l'accent d'abord sur les contraintes, et leur respect, plutôt que sur la recherche d'équilibres particuliers pour des évolutions spécifiées à priori. L'objectif de cet article est de montrer que la théorie de la viabilité ne se limite pas au simple calcul d'un noyau de viabilité relatif à un système dynamique sous contraintes mais qu'elle peut également servir à rechercher des « évolutions optimales » sous contraintes. Nous nous appuyons pour cette illustration sur un modèle de base qui sera progressivement complexifié. Les équations exprimant la dynamique et les contraintes de ces modèles sont décrites en annexe.

Les modèles macroéconomiques de développement durable sont brièvement exposés dans la première section. Nous présentons, en deuxième section, le travail de Martinet et Doyen (2007) qui ont été les premiers à utiliser la théorie de la viabilité pour définir le développement durable comme le respect en tout temps d'un ensemble de contraintes et proposons une extension à ce travail en introduisant un contrôle endogène des fluctuations de population. Nous abordons ensuite le problème de l'équité intergénérationnelle avec deux approches : un ensemble minimum de « droits » garanti à toutes les générations et la minimisation des inégalités entre générations. Enfin, la manière dont les outils de la viabilité permettent de sélectionner une évolution optimale est présentée.

## 2 Les modèles économiques de développement durable

Dans le modèle d'accumulation de capital et d'épuisement de ressource utilisé par Dasgupta-Heal et Solow, le processus de production nécessite à la fois du capital reproductible  $K$  et du capital non reproductible  $S$  dont on extrait une quantité  $r$  à chaque période (annexe A-1). La production est soit consommée  $C$ , soit réinvestie  $dK/dt$ . C'est un modèle de croissance à deux biens, où il s'agit d'arbitrer entre investissement et consommation sous contraintes de ressources. Le problème consiste à trouver la solution qui maximise le bien-être global de l'ensemble des générations d'ici à l'infini selon un principe d'équité. Il est nécessaire pour cela d'avoir un critère d'optimisation inter-temporel donnant une mesure de l'équité entre générations. Le plus courant de ces critères d'équité intergénérationnelle est la somme escomptée des utilités d'une infinité de générations représentant la fonction inter-temporelle de bien-être social. Les fondements éthiques de ce critère d'évaluation intergénérationnelle ont été justifiés axiomatiquement par Koopmans (1960) mais il reste controversé en raison des problèmes que posent le choix d'un taux d'actualisation et le traitement inéquitable des générations que cela implique. Il est pourtant utilisé dans la plupart des situations où on cherche à évaluer les impacts économiques de long terme, par exemple ceux du changement climatique. La description de ce modèle est donnée en annexe A-1. De nombreuses extensions du modèle de base ont été proposées. Tout d'abord pour fournir une alternative à ce critère d'équité intergénérationnelle et éviter ce qui a été nommé la dictature du présent (taux d'actualisation positif) ou la dictature du futur (taux d'actualisation nul), ou pour introduire dans la fonction d'utilité la valeur d'existence de la ressource naturelle, ou encore pour prendre en compte le progrès technique ou l'évolution de la population avec un taux de croissance, exponentiel ou logistique, donné. Quelles que soient les variantes de ce modèle, aussi compliquées soient-elles, elles se limitent à explorer les propriétés d'une trajectoire particulière sélectionnée a priori selon un critère d'équité et les résultats obtenus dépendent du critère d'optimisation choisi.

Dans le cadre de ce modèle, en utilisant le critère des utilités escomptées, il a été montré qu'il n'est pas possible de maintenir le niveau de consommation et que celui-ci tend vers zéro à moins que l'accumulation ou le changement technique ne compense l'extraction des ressources. Le développement durable n'est possible que dans le cas particulier où le capital reproductible se substitue au capital naturel non reproductible (par exemple en utilisant une fonction de production de type Cobb Douglas, annexe A-1). En se référant à la notion de justice établie par Rawls dans un cadre statique, Solow a montré que l'utilisation du critère du « maxi-min » (sélectionnant l'évolution qui maximise le bien être de la génération ayant le plus faible niveau de bien-être) impliquait le maintien d'un niveau de consommation constant à travers les générations. Cette analyse et ces résultats obtenus en définissant le développement durable comme une question de bien-être



et d'équité entre générations, est en accord avec la définition du rapport Brundtland mais elle peut choquer les écologistes préoccupés par la conservation des milieux naturels. Cela peut être plus nuancé si on considère que la conservation des milieux naturels, tout comme la santé ou le patrimoine culturel sont constitutifs du bien être et intégrés dans une fonction d'utilité. Ce cadre utilitariste pose cependant d'autres questions, en particulier celle de « l'agent représentatif » des différentes générations et de l'évolution des préférences dans le temps, celle sur la manière de combiner des biens de nature différente dans une fonction d'utilité, synthèse du bien-être d'une génération, celui-ci étant par ailleurs subjectif et non observable.

### 3 Durabilité - Viabilité et Respect des contraintes

La théorie de la viabilité est une théorie mathématique basée sur l'analyse multivoque, elle réalise des calculs d'ensembles et manipule des fonctions d'ensembles. Un des ensembles fondamentaux de cette théorie est le *Noyau de Viabilité : ensemble des états initiaux à partir desquels part au moins une évolution qui respecte toujours un ensemble de contraintes*. Ces contraintes, dites de viabilité, reflètent le problème étudié et sont définies dans le cadre d'un modèle censé représenter formellement ce problème. Les résultats mathématiques apportés par la théorie de la viabilité autorisent ces contraintes à dépendre du temps et des variables d'état. Au lieu de rechercher directement les solutions d'une fonction objectif définie préalablement, se limitant ainsi à une évolution particulière dont on ne peut garantir la réalisation soumise à un avenir inconnu, la théorie de la viabilité adopte une démarche inverse et ne postule pas d'objectif à priori. Elle s'intéresse à l'ensemble de toutes les évolutions envisageables à partir de l'état présent. Il s'agit en premier lieu de distinguer, parmi cet ensemble des possibles offert à un moment donné, les évolutions viables de celles qui ne le sont pas pour des contraintes et une dynamique données puis ensuite de rechercher, à l'aide de règles de rétroaction, la manière de « piloter » le système pour sélectionner les évolutions dotées de propriétés souhaitées. En calculant le noyau de viabilité relatif à un ensemble de contraintes et à une dynamique données, on peut savoir s'il existe, ou non, des possibilités d'évolutions viables à partir d'une situation initiale donnée et déterminer les régulations nécessaires pour rester sur une évolution viable selon l'évolution des variables d'état du système. Tout le problème consiste à définir convenablement ces contraintes et cette dynamique d'évolution, c'est-à-dire concevoir un modèle aussi pertinent que possible pour répondre à une question précise. Dans les modèles économiques du développement durable, ces contraintes disent qu'on ne peut consommer durablement plus que ce qui est produit, ou que les possibilités d'exploitation d'une ressource épuisable sont limitées par le stock des réserves existantes, ou que l'exploitation d'une ressource naturelle renouvelable ne doit pas dépasser sa capacité de renouvellement ou encore qu'il est nécessaire de garantir un certain niveau de vie minimum par habitant. Nous ne discutons pas, dans cet article, le bien-fondé ou l'intérêt de ces modèles économiques pris ici uniquement comme support pour illustrer, dans ce cadre, l'utilisation des outils de la viabilité.

Une évolution est dite viable (durable) si elle respecte en permanence ces contraintes de viabilité (durabilité) qui peuvent être physiques et elles sont alors impératives, ou normatives et elles sont donc éventuellement modifiables. Ces contraintes, qui déterminent les conditions de viabilité du système, peuvent donc être renforcées si on souhaite examiner la viabilité d'une « politique plus restrictive », ou relâchées si le noyau de viabilité est vide et aucun développement viable n'est possible dans ces conditions. Les évolutions ont une dynamique régie par un certain nombre de paramètres. Certains paramètres peuvent être constants et ce sont alors des coefficients. D'autres peuvent être amenés à évoluer pour maintenir la viabilité du système lorsqu'ils dépendent du temps ou des variables d'état et ce sont alors des contrôles ou des régulateurs. Lorsqu'on se trouve dans le noyau de viabilité, prendre un mauvais chemin et sortir de ce noyau est une situation qui peut toujours arriver à un moment ou à un autre. C'est dans ces situations que, pour éviter une crise à venir, il est nécessaire de modifier son comportement au temps opportun. Savoir quand, et comment, les contrôles doivent évoluer, ou comment sélectionner une évolution ayant des propriétés souhaitées est l'objet de la recherche en théorie de la viabilité et des techniques ont été mises au point pour répondre à ces questions.

Martinet et Doyen (2007) ont appliqué les outils de la théorie de la viabilité au modèle de Dasgupta-Heal et Solow (annexe A-1) et ont défini la durabilité par le fait de pouvoir respecter des contraintes en permanence ce qui consiste à rechercher les conditions dans lesquelles le noyau de viabilité n'est pas vide. Ces auteurs retrouvent les résultats précédemment acquis, qu'ils généralisent, mais surtout ils montrent que lorsque le noyau de viabilité n'est pas vide les évolutions durables ne sont pas uniques et ne se réduisent pas à une

évolution optimale, alimentant le débat sur les relations entre « optimalité » et « durabilité ». Ils imposent des contraintes plus restrictives au noyau de viabilité stipulant que les niveaux de consommation et le stock de ressources épuisables ne devront jamais être inférieurs à certains seuils admissibles. Ceci implique, pour une société dont les conditions initiales se situent dans le noyau de viabilité, que celle-ci pourra garantir un certain niveau de consommation (interprétation de la durabilité faible) et de préservation de la ressource (interprétation de la durabilité forte) à l'ensemble des générations futures. Les auteurs définissent alors la durabilité comme la possibilité de transmettre un ensemble de « droits minimaux » aux générations futures. Nous avons également repris, comme cas d'étude, le modèle de Dasgupta-Heal et Solow (annexe A-1) et étendu l'approche viabilité de Martinet et Doyen en tenant compte des variations de population, l'explosion démographique du siècle passé étant un élément central des préoccupations actuelles sur le développement durable.

La figure 1 présente un noyau de viabilité calculé de façon numérique (Saint-Pierre, 1994 et 1997) où, comme dans la proposition de Martinet et Doyen, la consommation (variable de contrôle) et le stock de ressource non reproductible (variable d'état) ne peuvent descendre en dessous d'un certain seuil. Alors que dans ce type de modèle la population est généralement considérée comme constante (annexe A-2.1), ou croissante mais de façon exogène (annexe A-2.2), ce noyau de viabilité a été calculé pour des variables en moyenne par habitant avec un système dynamique associé permettant de contrôler les fluctuations de population (annexe A-2.3). Dans ce modèle, la contrainte « comptable » porte sur la consommation totale qui ne peut être supérieure à ce qui est produit globalement, le montant de capital par tête peut donc être amené à diminuer si la croissance démographique ou/et la consommation par habitant sont trop élevées. La possibilité d'endogénéiser les mouvements de population est un premier exemple de l'apport des outils de la viabilité à ce modèle. Le taux de croissance de la population est un paramètre de régulation (ou contrôle) contraint d'évoluer entre deux bornes, minimale et maximale, dont l'écart a été choisi a priori comme relativement large. La borne inférieure a été fixée à  $n_{min} = 0$  (excluant une dépopulation dans ce cas de figure arbitraire) et la borne supérieure à  $n_{max} = 0,1$ . La fonction de production est fixe de type Cobb Douglas  $K^\alpha r^\beta$  avec  $\alpha = 3/4$  et  $\beta = 1/4$  et il n'y a pas de progrès technique dans cette illustration.

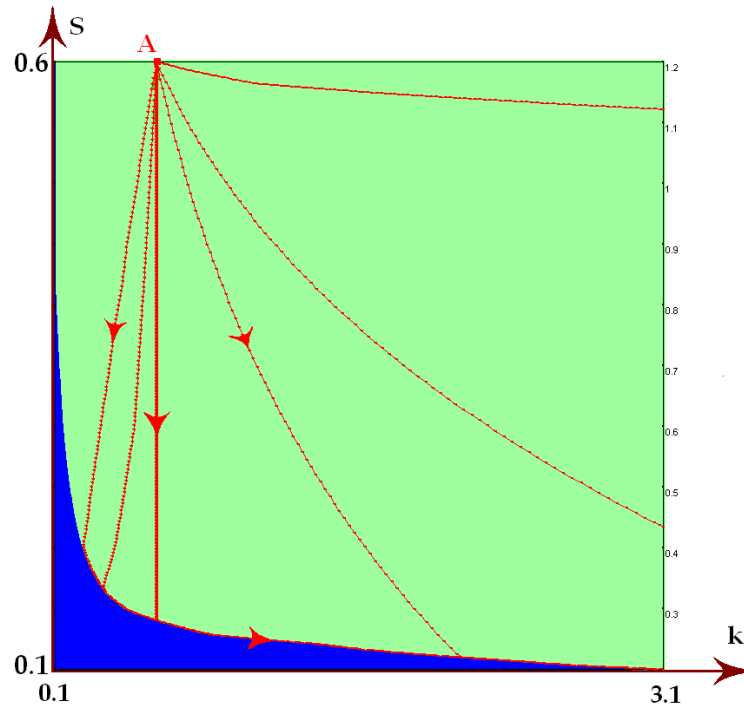


Figure 1 – Noyau de viabilité du modèle A-2.3

La forme du noyau de viabilité dépend de la dynamique du système. Dans ce modèle particulier, où la fonction de production permet la substitution entre la ressource épuisable et le capital manufacturé, il est possible d'être viable en disposant au départ uniquement de ressource ou uniquement de capital à condition que ces quantités soient infiniment grandes. Le point  $A$  représente une situation de départ, en ressource et capital, à partir de laquelle la ressource ne peut que diminuer. Il en part un très grand nombre d'évolutions selon les différentes combinaisons possibles de contrôles exercés (extraction, consommation et croissance démographique) qui peuvent aussi être modifiés par chaque génération.

La figure 2 montre un exemple des trajectoires suivies par les variables d'état (le capital manufacturé par tête,  $k$ , la quantité de ressources disponibles par personne,  $s$ , et le niveau de population  $P$ ) en fonction des contrôles exercés (consommation et quantité de ressource extraite par habitant, taux de croissance démographique) et tels que cette évolution particulière issue du point  $A : (k_0, s_0)$  de la figure 1 reste contenue dans le noyau de viabilité. Dans cet exemple, la situation initiale est celle d'une société faiblement capitaliste, avec une importante dotation en ressources naturelles et un taux de croissance démographique élevé.

Durant les premières générations, la population augmente très fortement et la production, basée sur l'exploitation de ressources naturelles très abondantes, n'est pas suffisante pour maintenir le niveau de consommation par tête. Ce mode de développement qui entraîne une diminution rapide de la ressource sans pour autant permettre l'accumulation de capital, n'est pas durable et la population doit se stabiliser. Le changement se produit à la quatorzième génération qui réduit drastiquement le taux de croissance démographique (ou qui émigre) tout en augmentant ponctuellement la quantité de ressource extraite par habitant permettant ainsi d'augmenter le niveau de capital par tête. Ceci permet d'amorcer un changement de mode de production où le capital reproductible remplace le capital non reproductible initiant une période de croissance continue bien que la ressource ait atteint son niveau de gel. Il devient alors possible d'augmenter « durablement » le niveau de consommation par habitant.

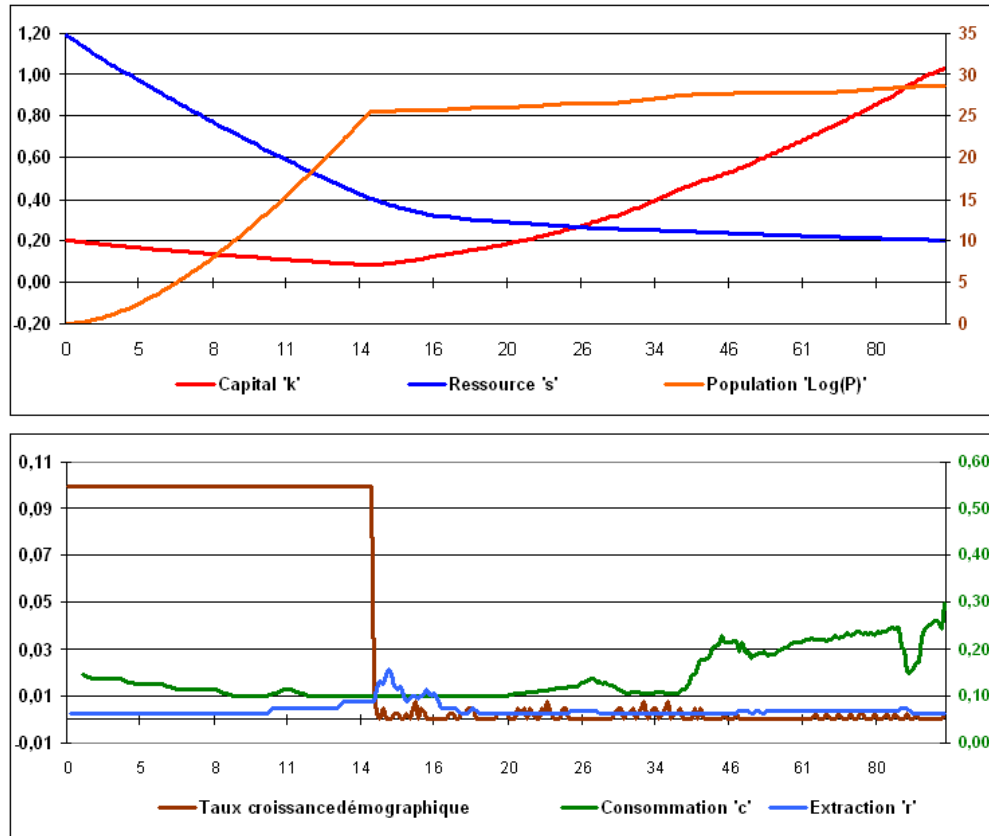


Figure 2 – Evolution des variables d'état et de contrôle d'une trajectoire viable (Modèle A-2.3)

## 4 Durabilité - Viabilité et Équité

Considérer le développement durable comme l'obligation de respecter des contraintes de ressources et d'en épargner une partie pour assurer la transmission d'une quantité minimale de biens aux générations futures, n'est pas suffisant. Le noyau de viabilité calculé précédemment contient toutes les situations initiales à partir desquelles il existe au moins une évolution viable. Il peut y en avoir un très grand nombre, et parmi celles-ci, il est possible que beaucoup ne soient pas des évolutions « équitables ». Si certaines générations se trouvent par exemple dans une situation où le niveau de la ressource est infiniment grand par rapport à leurs besoins, rien a priori ne peut leur indiquer la nécessité de ne pas les gaspiller, encore moins de les épargner ou d'investir pour les générations futures, ce n'est qu'à l'approche de la limite d'exploitation que s'opère cette prise de conscience. Décidés trop tard, les nécessaires changements de comportement imposeront aux générations à venir des sacrifices qui, s'ils avaient été mieux répartis auraient pu être moindres. Cette situation sera cependant viable si les générations sacrifiées réalisent, au détriment de leur propre bien-être, les efforts nécessaires pour respecter les contraintes de viabilité. Il importe donc de rechercher, parmi les évolutions viables, celles qui offriront une plus juste répartition, entre les générations, des ressources et des investissements en capital humain et matériel en fonction des dotations et des capacités de chaque génération.

Il y a différentes manières d'aborder ce problème avec les outils de la viabilité et nous en présenterons deux : la garantie des droits et la réduction des inégalités intergénérationnelles. La première, envisagée par Martinet et Doyen, consiste à agir sur les contraintes et à rechercher le niveau maximum de « droit minimum » en termes de consommation garantie par habitant et de ressource préservée qui pourront être transmis à l'ensemble des générations : contraindre, à toutes les périodes, les générations présentes à respecter les « droits » des générations futures (annexe A-2.3). La seconde consiste à utiliser une fonction qui permettra de sélectionner, parmi toutes les évolutions viables, celle pour laquelle « l'inégalité » entre les générations sera la plus faible. Pour cet exercice, nous nous intéressons aux variations de la consommation par tête entre générations successives (annexe A-3).

### 4.1 Garantir des droits aux générations futures :

Le noyau de viabilité de la figure 1 est l'ensemble de toutes les conditions initiales à partir desquelles il est possible de transmettre un niveau déterminé de consommation minimale  $c_b$  et de ressource préservée  $s_b$  à l'ensemble des générations futures. La taille de ce noyau dépend des seuils  $c_b$  et  $s_b$  : plus les contraintes envers les générations futures seront fortes, plus l'ensemble des conditions initiales (dotations en capital et en ressource) permettant d'offrir ces garanties sera réduit. On sait que pour toutes les situations initiales à l'intérieur du noyau de viabilité, il y aura au moins une évolution qui garantira à toutes les générations futures un niveau minimum de consommation par habitant supérieur ou égal à  $c_b$  et une quantité minimum de ressources par habitant supérieure ou égale à  $s_b$ . Mais pour une situation initiale donnée à l'intérieur du noyau de viabilité, il est aussi possible qu'il existe une évolution viable offrant des garanties minimales  $c_b^*$  et  $s_b^*$  plus élevées que  $c_b$  et  $s_b$ .

Le problème est donc maintenant de rechercher la meilleure de ces garanties, en termes de consommation minimale et de ressource préservée, pour un état initial donné. Ce problème est difficile car ces meilleures garanties constituent un optimum de Pareto et il en existe plusieurs tous situés sur la frontière schématisée sur la figure 3.

Sélectionner une de ces paires consiste à faire un arbitrage. Nous présentons ici une façon de rechercher l'une ou l'autre de ces garanties optimales, par exemple le niveau maximum de consommation qu'il est possible de garantir à toutes les générations futures tout en préservant une quantité donnée de ressource. Pour un seuil  $s_b$  de ressource fixé, on recherche le plus petit niveau de consommation par habitant réalisé par toutes les générations se succédant le long d'une évolution particulière  $\inf_{t \geq 0}$ . Il s'agit ensuite de trouver, sur l'ensemble de toutes les évolutions viables issues de la situation initiale  $(k_0, s_0)$ , celle qui offrira le plus grand niveau de consommation minimum à toutes ses générations :

$$\alpha_{s_b}(k_0, s_0) = \sup_{k(\cdot), s(\cdot)} \inf_{t \geq 0} c(t)$$

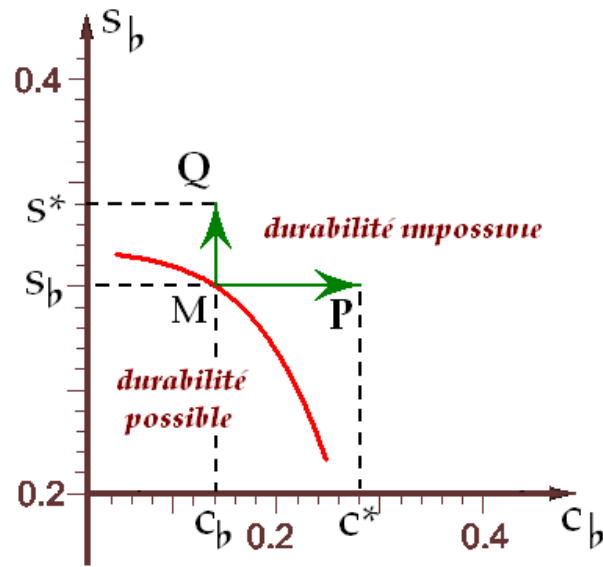


Figure 3 – Courbe des paires Pareto-optimales  $(c_b^*, s_b^*)$  pour une condition initiale donnée

La figure 4 représente le graphe de la fonction  $\alpha_{s_b}(\cdot, \cdot)$  relative au système dynamique contraint du modèle de l'annexe A-2.3 et calculée à l'aide d'algorithmes de viabilité. Sur cette figure sont représentées deux conditions initiales  $A$  et  $B$  avec, au départ, une même quantité de ressource  $s_0$  et différentes dotations en capital  $k_A < k_B$ . Cette figure montre qu'avec un même niveau de ressource initiale, il est nécessaire de disposer au départ d'un capital manufacturé plus important si l'on souhaite garantir une consommation plus élevée à toutes les générations.

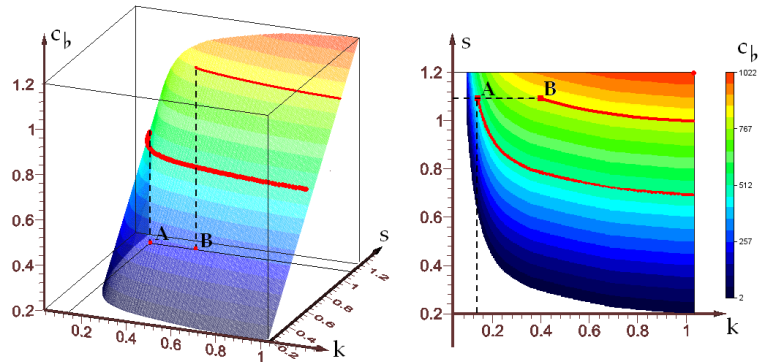


Figure 4 – Graphe de la fonction de seuil minimal pour la consommation garantie (Modèle A-2.3)

## 4.2 Minimiser les inégalités entre générations :

Aborder le problème de l'équité entre générations consiste à pouvoir comparer et classer, selon une mesure d'équité, des suites infinies de niveaux de consommation (ou d'« utilité » ou de « bien-être » si on inclut dans ces notions la valeur d'existence d'une certaine qualité environnementale et le coût de sa dégradation) en tenant compte de l'intérêt de chaque génération. Ce problème est plus difficile que celui de l'équité intra-générationnel car les transferts entre générations sont univoques et l'horizon infini. Une approche normative du développement durable a été développée caractérisant l'équité intergénérationnelle par le respect de deux axiomes, le principe de Pareto - ou d'efficacité - (toute suite infinie dont les éléments sont supérieurs à ceux d'une autre doit lui être préférée) et le principe d'anonymat faible - ou de neutralité - (une permutation de n'importe quelle paire d'éléments d'une suite ne doit pas changer son évaluation). Le respect de ces deux

axiomes qui implique l'absence de gaspillage et de discrimination est qualifiée de principe de Suppes-Sen (Asheim, 2007). Il n'existe pas de critère offrant une représentation numérique, et donc un outil de mesure opérationnel, qui satisfasse aux conditions de ces deux axiomes conjointement. La somme infinie des utilités escomptées, critère d'évaluation inter-temporel le plus utilisé pour des raisons techniques, respecte le principe de Pareto mais pas celui d'anonymat et ne traite pas les différentes générations de manière égalitaire (Heal, 2005, Asheim, 2007).

Avoir un objectif d'équité intergénérationnelle dans un modèle de viabilité consiste à introduire un « contrôle » permettant de réguler le comportement de chaque génération (et non plus à comparer un score d'équité réalisé le long de différents chemins de développement par une succession infinie de générations), de façon à ce qu'aucune d'entre elles, le long du développement, ne soit une génération « injustement » sacrifiée en tant que telle par des choix présents ou précédents. Dans le modèle étudié ici, chaque génération fait des choix entre consommer, produire et se reproduire selon ses dotations en capital naturel et manufacturé et le niveau de sa population. Le résultat de ces choix, en termes d'accumulation de capital, détermine l'éventail des possibilités offertes aux générations suivantes. Sans progrès technique, et avec une fonction de production autorisant la substitution entre les facteurs de production, le niveau de consommation et la fertilité sont les deux éléments qui décident de l'héritage (en quantité et non qualité pour ce modèle) laissé aux générations suivantes. Nous avons donc retenu le niveau de consommation par habitant et considéré que le pourcentage de variation du niveau de consommation par habitant entre générations successives constituait une mesure de l'« inégalité » entre générations qu'il faut maintenant chercher à réduire (annexe A-3). Nous avons utilisé le pourcentage de variation  $c'(t)/c(t)$  entre générations successives, une mesure relative, plutôt que les écarts de consommation par habitant entre générations  $c'(t)$ , une mesure absolue, pour appréhender la notion de « bien être » en tenant compte de l'effet d'accumulation de richesse le long des générations. C'est en effet la position des utilitaristes qui, pour évaluer de façon équivalente le niveau de bien être de différentes générations, emploient la fonction d'utilité, fonction concave et croissante de la consommation, permettant de donner moins de poids à l'augmentation marginale de consommation des générations les plus riches par rapport à celle des générations les plus pauvres.

Contrôler le taux de croissance de la consommation par habitant de chaque génération tout en respectant l'ensemble des autres contraintes de viabilité consiste à ajouter au problème précédent une dynamique auxiliaire portant sur la dérivée dans le temps de la consommation par habitant. Le fait de soumettre la consommation, qui est un contrôle, à l'exercice d'un contrôle, qualifié de méta-contrôle, change le statut de cette variable. Elle passe formellement du statut de variable de contrôle à celui de variable d'état ce qui augmente la dimension du système. La figure 5 présente la frontière inférieure de ce nouveau noyau de viabilité et la figure 6 montre un exemple de décours temporel des variables d'état et des contrôles exercés le long d'une évolution issue du point A du noyau de viabilité. Comme dans le cas précédent, le taux de croissance de la population est endogène, c'est un paramètre de régulation qui régit le niveau de la population de façon à ce que l'évolution reste viable, à l'intérieur ou sur la frontière du noyau de viabilité. La description de ce modèle est présentée dans l'annexe A-3.

L'évolution du niveau de consommation par habitant est maintenant déterminée par la dynamique  $c'(t) = \nu(t)c(t)$ . Etablir une forme d'équité intergénérationnelle limitant les inégalités entre générations, tout en respectant les contraintes écologiques et matérielles de production, consiste, dans cet exemple, à contraindre  $\nu(t)$ , le taux de croissance de la consommation par habitant, à être toujours supérieur ou égal à un certain seuil minimum  $\nu_{min}$ . Si le noyau de viabilité de ce méta-système (annexe A-3) n'est pas vide, il sera possible de trouver un chemin de développement viable et équitable à partir de toute situation initiale appartenant à ce noyau. Le taux de croissance de la consommation par habitant d'une génération quelconque  $\nu(t)$  peut être amené à diminuer, en raison d'une augmentation de population ou d'une consommation trop importante des générations précédentes et d'une production insuffisante, mais cette diminution sera toujours limitée par la contrainte inférieure  $\nu(t) \geq \nu_{min}$ . Cette contrainte s'applique à toutes les générations et, couplée aux autres contraintes, elle interdit les modes de développement (en termes de production, de consommation, d'extraction de ressource et de démographie) où le comportement de certaines générations aurait un impact trop négatif sur la consommation des générations futures.

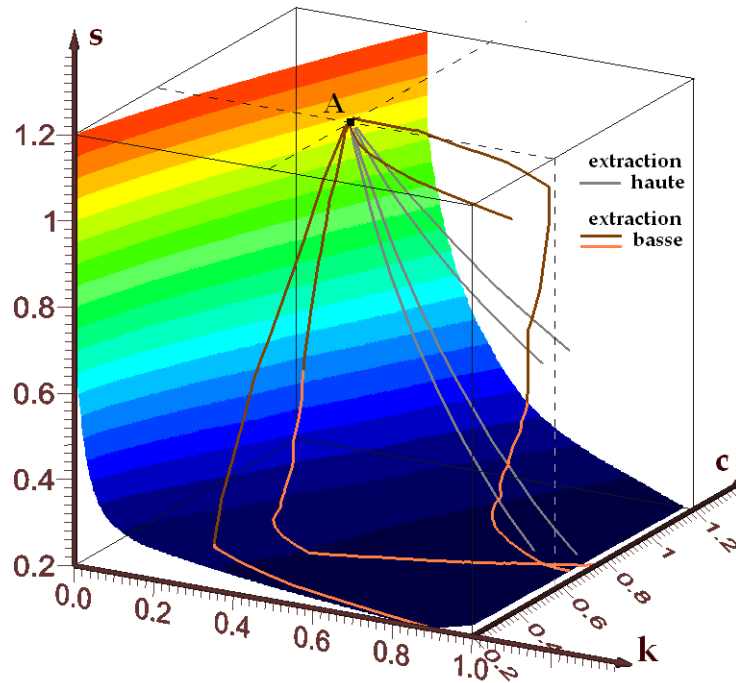


Figure 5 – Noyau de viabilité du modèle (Modèle A-3)

Si  $\nu_{min}$  est fixé à zéro, la consommation par habitant des générations futures ne pourra jamais être inférieure à celle des générations précédentes. Si  $\nu_{min}$  est négatif cela signifie que la consommation par habitant peut diminuer pour certaines générations mais jamais en dessous d'un certain pourcentage admissible. Si  $\nu_{min}$  est positif, cela signifie que la consommation par tête doit augmenter de façon exponentielle avec les générations (le noyau de viabilité sera vide s'il n'est pas possible de respecter toutes les contraintes dans ce cas). Nous n'avons pas introduit de borne supérieure  $\nu_{max}$  considérant qu'il n'était pas justifié d'imposer une limite à la croissance des consommations futures par une contrainte a priori autre que celle du système productif. L'évolution du niveau de consommation par habitant est limitée simplement par la règle «  $\nu(t) \geq \nu_{min}$  », un devoir moral envers les générations futures qui s'applique à toutes les générations.

Ce noyau de viabilité contient l'ensemble des situations initiales à partir desquelles il existera des évolutions qui respecteront les contraintes du précédent modèle ainsi que la forme d'équité intergénérationnelle définie plus haut. Il a été calculé en imposant un frein de 5% ( $= -0,05$ ) au pourcentage de diminution éventuelle du niveau de consommation par habitant. Quelques évolutions viables partant du point  $A : (k_0, s_0)$  sont représentées sur la figure 5. Elles diffèrent selon les diverses combinaisons de décisions sous contrainte qui peuvent être prises (consommation, extraction, croissance démographique). De nombreux choix sont admissibles, ils peuvent être maintenus constants ou modifiés à tout moment. Ce n'est que lorsqu'une évolution s'apprête à quitter le noyau de viabilité que la modification des contrôles qui la régissent devient impérative pour rester dans le noyau de viabilité ou sur sa frontière. La valeur des contrôles est sélectionnée en fonction de celles prises par les variables d'état selon une règle en feedback calculée numériquement de façon à ce que l'évolution reste viable. La figure 6 reprend une de ces évolutions, la deuxième à partir de la gauche figurée sur le noyau.

Cette figure 6 représente dans la partie supérieure, le décours temporel des variables d'état : la consommation par habitant  $c$ , le capital par habitant  $k$ , la quantité de ressource disponible par habitant  $s$ , la population  $P$  et, dans la partie inférieure, le décours temporel des contrôles exercés : « le niveau d'équité »  $\nu$ , la croissance démographique  $n$  et la quantité ressource extraite par habitant  $r$ . Ce mode de développement est caractérisé à ses débuts par une croissance rapide de la population couplée à un niveau de vie relativement élevé et une augmentation de la consommation par tête. Ce comportement « égoïste » des premières générations entraîne une décapitalisation et un épuisement rapide de la ressource naturelle, la frontière du noyau de viabilité est



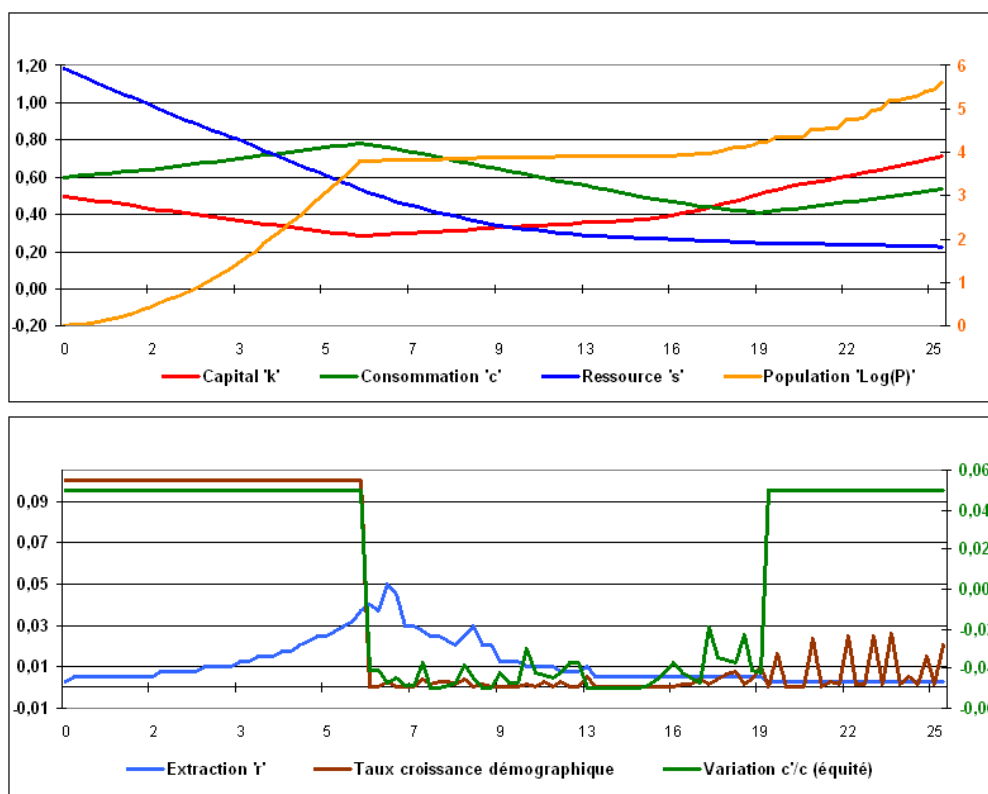


Figure 6 – Evolution des variables d'état et de contrôle d'une trajectoire viable (Modèle A-3)

rapidement atteinte. Pour pouvoir rester viable, la population doit se stabiliser et la consommation par tête est obligée de décroître. Les efforts que les générations de cette période d'austérité sont amenées à faire sont cependant adoucis car toutes les générations sont également obligées (par une contrainte de viabilité) de respecter un certain seuil d'équité intergénérationnelle (dans cet exemple, le pourcentage de réduction de la consommation par tête ne peut dépasser 5%). En fin d'ajustement, le capital accumulé est suffisamment important pour que la consommation par habitant soit à nouveau en mesure de croître pour les générations suivantes autorisant même une augmentation de la population. L'exemple de la figure 6 est issu du même point initial que celui de la figure 2. Il possède les mêmes configurations en termes de dotations initiales et de contrôles exercés au départ. La seule différence entre ces deux graphiques consiste à avoir imposé à toutes les générations une contrainte d'équité intergénérationnelle. Cette contrainte a eu pour effet de raccourcir la période initiale de forte croissance démographique et de décapitalisation. La croissance démographique diminue ici à partir de la 6<sup>ème</sup> génération, alors que sans contrainte d'équité (figure 2), la croissance de la population se poursuit pendant 14 générations aggravant la situation des générations suivantes. L'époque où le niveau de consommation par habitant peut augmenter est également plus précoce et, s'il existe dans les deux cas une succession de générations sacrifiées, en charge du réajustement, celles-ci sont moins nombreuses lorsqu'on impose une condition d'équité intergénérationnelle.

Les évolutions viables présentées sur les figures 2 et 6, calculées de façon numérique, ne sont que des illustrations de l'apport des outils de la viabilité. Le noyau de viabilité et les évolutions qui partent d'un point du noyau dépendent du modèle choisi, de sa dynamique et des contraintes. Ils dépendent aussi de la valeur des paramètres qui ont été fixés ici de façon cohérente mais arbitraire, en particulier le niveau des bornes minimales et maximales des variables de contrôle (la consommation ou sa variation, l'extraction et le taux de croissance démographique). D'autres valeurs de ces paramètres ou d'autres fonctions de production peuvent être explorées. On peut également envisager la construction d'autres « critères » (actions sur les variables d'état), par exemple sur la gestion et la préservation du capital naturel, ou sur la manière de mettre en jeu le progrès technique dont on peut concevoir que l'apparition se fasse par saut en cas de crise.



## 5 Durabilité - Viabilité et Optimalité

Un des attraits de la théorie de la viabilité est la perspective qu'elle offre de pouvoir analyser les systèmes dynamiques sans nécessairement mettre en avant la recherche de solutions optimales selon un critère particulier comme cela est le cas avec la théorie du contrôle optimal. En ce sens, l'« approche viabilité » et l'« approche optimalité » sont différentes mais elles ne sont pas non plus en opposition, comme cela est dit parfois, car les outils de la viabilité permettent également de résoudre, différemment, des problèmes d'optimisation, inter-temporelle en particulier. Nous en donnons un exemple en poursuivant l'analyse qui a été faite de l'équité intergénérationnelle.

Pour cela nous introduisons la fonction d'inertie qui permet de sélectionner la plus « équitable » possible de toutes les évolutions viables : celle où le plus grand écart de consommation par habitant entre deux générations quelconques le long d'une évolution sera le plus faible. Si  $k_0$ ,  $s_0$  et  $c_0$  sont les niveaux initiaux de capital, de ressource épuisable et de consommation par tête,  $P_0$  étant le niveau de population, cette valeur s'écrit :

$$\beta(k_0, s_0, c_0, P_0) := \inf_{k(\cdot), s(\cdot), c(\cdot), P(\cdot)} \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{c'(t)}{c(t)} \right\|$$

La fonction  $\beta(\cdot)$  établit le plus petit pourcentage de variation - en valeur absolue - de consommation par habitant qu'il est possible de ne jamais dépasser. Le long de cette évolution « équitable », les variations de consommation par habitant entre générations vérifieront la relation pour toutes les générations (indexées ici par  $t$ ).

Théoriquement, la plus petite valeur de cette fonction d'inertie ne peut être que nulle. S'il s'avère que  $\beta(k_0, s_0, c_0, P_0) = 0$  à partir d'un état initial donné, cela signifie que l'évolution viable la plus « équitable » sera celle où la consommation par habitant restera constante pour toutes les générations ( $\left\| \frac{c'(t)}{c(t)} \right\| = 0$  pour tout  $t$ ).

Cette situation malthusienne, où l'accroissement de capital compense exactement la dépréciation de ressource et la croissance de la population, ne permet pas d'augmenter le niveau de consommation par habitant des futures générations. Elle instaure certes une égalité parfaite entre générations mais, en excluant les possibilités d'amélioration du niveau de vie, elle est difficilement acceptable comme conception du développement durable et de l'équité intergénérationnelle. Elle correspond à la solution que l'on obtient en utilisant le critère du maxi-min dans un cadre intergénérationnel, solution étudiée et contestée par Solow (1974) au motif qu'une société pauvre au départ serait condamnée à le rester éternellement.

C'est pourquoi, comme cela a déjà été proposé dans la section 3.2, il est préférable de n'imposer de limite qu'aux variations à la baisse de la consommation par habitant en considérant que l'équité intergénérationnelle ne doit pas empêcher l'augmentation de bien-être des générations futures. Nous proposons pour cela d'utiliser une nouvelle fonction, la *fonction d'équité*.

Au lieu de rechercher la valeur  $\beta(k_0, s_0, c_0, P_0)$  encadrant les écarts de consommation par habitant entre générations de façon telle que  $\frac{c'(t)}{c(t)} \leq \beta(k_0, s_0, c_0, P_0)$  en cas de hausse et  $\frac{c'(t)}{c(t)} \geq -\beta(k_0, s_0, c_0, P_0)$  en cas de baisse, il s'agit de ne prendre en compte que la borne inférieure  $\nu_{min}$  telle que le taux de croissance de la consommation par habitant de chaque génération  $\nu(t) = \frac{c'(t)}{c(t)}$  sera toujours supérieur à  $\nu_{min}$  pour toutes les générations. Cette obligation envers les générations futures s'applique à toutes les générations, la génération présente et toutes celles à venir.

La fonction d'équité détermine quelle est la plus grande valeur de cette borne inférieure qui puisse être obtenue pour chaque situation initiale. La description du méta-système permettant de calculer la fonction d'équité est présentée dans l'annexe A-4. La valeur de la fonction d'équité au point  $(k_0, s_0, c_0, P_0)$  s'écrit :

$$\gamma(k_0, s_0, c_0, P_0) := \sup_{k(\cdot), s(\cdot), c(\cdot), P(\cdot)} \inf_{t \geq 0} \frac{c'(t)}{c(t)}$$

Si  $\gamma(k_0, s_0, c_0, P_0)$  est négatif, cela signifie qu'il n'est pas possible, à partir de cette situation initiale, d'avoir un chemin de développement viable où le niveau de consommation par tête serait non décroissant

pour toutes les générations mail il est possible de trouver le chemin de développement viable où la plus forte diminution de consommation par habitant qui pourra advenir pour des générations quelconques sera la plus faible.

Si  $\gamma(k_0, s_0, c_0, P_0)$  est positif ou nul cela signifie que, partant d'une situation initiale donnée, il est possible de trouver une évolution viable au cours de laquelle la consommation par habitant sera toujours croissante ou constante, son taux de croissance restant toujours supérieur ou égal à  $\gamma(k_0, s_0, c_0, P_0)$ .

A la différence de ce qui a été exposé dans la section 3.2 où la borne inférieure  $\nu_{min}$  était un paramètre fixé a priori, il s'agit ici de rechercher la plus grande valeur de  $\nu_{min}$  pour laquelle il existera un chemin de développement viable où le taux de croissance de la consommation par tête sera supérieur ou égal cette borne pour toutes les générations. Pour tous les autres sentiers de développement viable à partir de cette même situation initiale, une ou plusieurs générations auront un taux de croissance de leur consommation inférieur à  $\nu_{min}$ .

Il s'agit bien d'une méthode d'optimisation inter-temporelle sélectionnant une évolution viable particulière de type « meilleure du pire des cas ». Ce mode de sélection d'une évolution « optimale » diffère cependant d'un problème de contrôle optimal classique dans la mesure où le critère est un opérateur « sup inf » et non de type « intégral ». Par ailleurs, cette méthode d'optimisation ne nécessite pas que la fonction valeur soit différentiable et, surtout, elle prend en compte l'ensemble des contraintes sans conditions restrictives.

Cette méthode diffère également des méthodes d'optimisation classiques dans le sens où le choix des contrôles n'est pas décidé une fois pour toutes au moment initial. Il peut être changé à chaque génération pour prendre en compte les modifications de l'environnement et s'adapter aux contraintes de viabilité. Alors que les méthodes d'optimisation inter-temporelle classiques, par le biais de l'actualisation, cherchent à comparer et classer des évolutions où les décisions sont prises une fois pour toutes, présupposant l'invariance du futur, cette approche s'apparente plus à un indicateur permettant à chaque génération de s'engager sur un chemin de développement durable et équitable.

Cette façon de sélectionner une évolution viable et équitable correspond à la définition du développement durable proposée par Asheim (2007) :

« A generation's management of the resource base at some point in time is sustainable if it constitutes the first part of a feasible sustained development. A stream of wellbeing develops in a sustainable manner if each generation's management of the resource base is sustainable. »

## 6 Conclusion

Etudier le développement durable pose de nombreux problèmes théoriques et pratiques, la manière de les aborder est souvent limitée par les techniques disponibles, la manière de les évaluer est limitée par la disponibilité des informations adéquates. La découverte de nouvelles techniques permet parfois de renouveler la manière de penser ces problèmes. Ce fut le cas lorsque Weitzman (1976) en adaptant un formalisme plus général à ces modèles de croissance durable a ouvert la voie à de nouvelles analyses et interprétations du développement durable, introduisant les concepts d'épargne véritable et de Produit National Vert. Les recherches actuelles sur la possibilité d'établir des indicateurs macroéconomiques de développement durable sont issues de ce changement.

La théorie de la viabilité commence à être utilisée avec un certain succès, en particulier dans le domaine de la gestion des ressources renouvelables. L'approche viabilité décrite comme une approche inverse permettant de trouver l'ensemble des évolutions respectant des contraintes à chaque moment plutôt que de rechercher des solutions réalisant un objectif établi a priori, est souvent confinée à la recherche de noyaux de viabilité. Elle est considérée comme une alternative à la recherche de solutions d'équilibre et comme opposée à la notion d'optimalité. Cet article sur les modèles de développement durable cherche à montrer que la viabilité ne se limite pas au concept de noyau de viabilité et au respect des contraintes. Les outils de la théorie de la viabilité n'interdisent pas forcément la recherche de solutions optimales, ils permettent aussi de résoudre, différemment, des problèmes d'optimisation inter-temporelle.

Pour nombre de chercheurs, la théorie de la viabilité est considérée comme une approche ouvrant la voie à un changement de paradigme, dans un domaine, l'environnement, où l'optique plus classique de recherche de trajectoires d'équilibre s'est révélée inadéquate, et donc comme une promesse de surmonter ces difficultés ou insuffisances. Cette promesse est vraie mais doit être mesurée. La théorie de la viabilité est un outil puissant qui peut apporter des réponses à des questions précises issues d'un modèle bien formulé. Le spectre des questions peut être très large et ne se limite pas à celles concernant le « respect des contraintes ». Les problèmes de « pilotage » autonome sous contraintes sont un des fondements de cette théorie. L'arsenal mathématique de la théorie de la viabilité autorise l'étude et le calcul de nombreuses fonctions qui, correctement interprétées, peuvent être utiles pour étudier des aspects très divers des problèmes d'environnement et de développement durable. Concevoir ces modèles, éventuellement en changer, est une tâche préalable qui peut être difficile. L'utilisation des outils de la théorie de la viabilité se heurte à deux obstacles. D'une part son maniement n'est pas forcément aisé, il requiert un certain investissement dans ces techniques mathématiques non classiques et rarement enseignées, et la conception de modèles pertinents nécessite à la fois une bonne maîtrise du problème étudié et une connaissance minimum de ces techniques mathématiques. D'autre part la dimension, et donc la complexité, des problèmes qu'il est possible d'étudier numériquement est actuellement encore limitée par la capacité des outils informatiques nécessaires pour effectuer des calculs sur les ensembles.

## Annexe

Sous sa forme générale, un modèle de viabilité s'écrit sous la forme d'un système dynamique contraint :

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) &= f(x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U(x(t)) \\ x(t) &\in M \end{cases} \quad \forall t \geq 0$$

où  $x'(t) = f(x(t), u(t))$  représente la dynamique du système qui dirige l'évolution des variables d'état  $x(t)$  sous l'action des contrôles  $u(t)$ . Les contrôles  $u$  appartiennent à un ensemble admissible qui dépend des variables d'état  $U(x)$  et  $M$  représente l'ensemble des contraintes sur l'état qui doivent être respectées pour tout  $t \geq 0$ .

Le noyau de viabilité de ce système est l'ensemble :

$$\text{Viab}_f(M) := \{x_0 \in M \text{ tel que } \exists u(.) \text{ et } \exists x(.) \text{ solution de (1) avec } x(0) = x_0\}$$

Définitions des variables :

- $P$  : Population
- $K$  : Capital manufacturé
- $S$  : Ressource épuisable
- $R$  : Ressource totale extraite par période
- $C$  : Consommation
- $n$  : Taux de croissance de la population
- $\nu$  : Taux de croissance de la consommation par tête
- $z$  : Indicateur de niveau d'équité

On pose :

- $k := \frac{K}{P}$  : Capital manufacturé par personne
- $c := \frac{C}{P}$  : Consommation par personne
- $r := \frac{R}{P}$  : Quantité de ressource extraite par personne
- $s := \frac{S}{P}$  : Quantité de ressource disponible par personne

### A-1 Le modèle de Dasgupta et Heal (1974) : une « cake-eating » économie

Il correspond à un problème de contrôle optimal décrit par :

- Une dynamique :  $\begin{cases} \frac{dK}{dt}(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta - C(t) \\ \frac{dS}{dt}(t) = -R(t) \end{cases}$

- Un critère d'équité à maximiser :  $\max \int_t^\infty U(C(\tau))e^{-\rho(t-\tau)}d\tau$

Le développement peut être durable si la fonction de production autorise la substitution entre les biens, par exemple une fonction de type Cobb-Douglas,  $K^\alpha R^\beta$ , avec  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha > \beta$ .

### A-2.1 Durabilité – Viabilité, le modèle de Martinet et Doyen (2007) : respecter des contraintes en tout temps avec une population constante

$$(21) \quad \begin{cases} x'_{21}(t) &= f_{21}(x_{21}(t), u_{21}(t)) \\ u_{21}(t) &\in U_{21}(x_{21}(t)) \\ x_{21}(t) &\in M_{21} \end{cases} \quad \forall t \geq 0$$

Variables d'état :  $x_{21} : \{k, s\}$   
Variables de contrôle :  $u_{21} : \{r, c\}$

Dynamique

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt}(t) = k(t)^\alpha r(t)^\beta - c(t) \\ \frac{ds}{dt}(t) = -r(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dK}{dt}(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta - C(t) \\ \frac{dS}{dt}(t) = -R(t) \end{cases}$$

Relations caractérisant les contraintes sur les variables d'état :  $M_{21}$

$$\begin{cases} k \geq 0 \\ s \in [s_b, s_0] \end{cases}$$

Relations caractérisant les contraintes sur les variables de contrôle :  $U_{21}$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq r_{max} \\ c_b \leq c \leq k^\alpha r^\beta \end{cases}$$

### A-2.2 Durabilité – Viabilité : Prendre en compte la croissance de la population

$$(22) \quad \begin{cases} x'_{22}(t) &= f_{22}(x_{22}(t), u_{22}(t)) \\ u_{22}(t) &\in U_{22}(x_{22}(t)) \\ x_{22}(t) &\in M_{22} \end{cases} \quad \forall t \geq 0$$

Variables d'état :  $x_{22} : \{k, s\}$   
Variables de contrôle :  $u_{22} : \{r, c\}$

Dynamique

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt}(t) = k(t)^\alpha r(t)^\beta - nk(t) - c(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = nP(t) \\ \frac{ds}{dt}(t) = -r(t) - ns(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dK}{dt}(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta - C(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = nP(t) \\ \frac{dS}{dt}(t) = -R(t) \end{cases}$$

Relations caractérisant les contraintes sur les variables d'état :  $M_{22}$

$$\begin{cases} k \geq 0 \\ s \in [s_b, s_0] \end{cases}$$

Relations caractérisant les contraintes sur les variables de contrôle :  $U_{22}$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq r_{max} \\ c_b \leq c \leq k^\alpha r^\beta \\ n = 0.05 \end{cases}$$

### A-2.3 Durabilité – Viabilité : Introduire des variations du taux de croissance démographique

$$(23) \quad \begin{cases} x'_{23}(t) &= f_{23}(x_{23}(t), u_{23}(t)) \\ u_{23}(t) &\in U_{23}(x_{23}(t)) \\ x_{23}(t) &\in M_{23} \end{cases} \quad \forall t \geq 0$$

Variables d'état :  $x_{23} : \{k, s, P\}$   
Variables de contrôle :  $u_{23} : \{r, c, n\}$

Dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dk}{dt}(t) = k(t)^\alpha r(t)^\beta - n(t)k(t) - c(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = n(t)P(t) \\ \frac{ds}{dt}(t) = -r(t) - n(t)s(t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dK}{dt}(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta - C(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = n(t)P(t) \\ \frac{dS}{dt}(t) = -R(t) \end{array} \right\}$$

Relations caractérisant les contraintes  
sur les variables d'état :  $M_{23}$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0 \\ s \in [s_b, s_0] \end{array} \right\}$$

Relations caractérisant les contraintes  
sur les variables de contrôle :  $U_{23}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq r_{max} \\ c_b \leq c \leq k^\alpha r^\beta \\ n \in [n_{min}, n_{max}] \end{array} \right\}$$

### A-3 Durabilité – Viabilité : Prendre en compte l'équité intergénérationnelle

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_3(t) = f_3(x_3(t), u_3(t)) \\ u_3(t) \in U_3(x_3(t)) \\ x_3(t) \in M_3 \end{array} \right\} \quad \forall t \geq 0$$

Variables d'état :  $x_3 : \{k, s, P, c\}$

Variables de contrôle :  $u_3 : \{r, n, \nu\}$

Dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dk}{dt}(t) = k(t)^\alpha r(t)^\beta - n(t)k(t) - c(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = n(t)P(t) \\ \frac{ds}{dt}(t) = -r(t) - n(t)s(t) \\ \frac{dc}{dt}(t) = \nu(t)c(t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dK}{dt}(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta - C(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = n(t)P(t) \\ \frac{dS}{dt}(t) = -R(t) \\ \frac{dC}{dt}(t) = (\nu(t) + n(t))C(t) \end{array} \right\}$$

Relations caractérisant les contraintes  
sur les variables d'état :  $M_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0 \\ s \in [s_b, s_0] \\ c \geq c_b \end{array} \right\}$$

Relations caractérisant les contraintes  
sur les variables de contrôle :  $U_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq r_{max} \\ n \in [n_{min}, n_{max}] \\ c \leq k^\alpha r^\beta \\ \nu \geq \nu_{min} \end{array} \right\}$$

### A-4 Durabilité – Viabilité : Optimisation inter-temporelle

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_4(t) = f_4(x_4(t), u_4(t)) \\ u_4(t) \in U_4(x_4(t)) \\ x_4(t) \in M_4 \end{array} \right\} \quad \forall t \geq 0$$

Variables d'état :  $x_4 : \{k, s, P, c, z\}$

Variables de contrôle :  $u_4 : \{r, n, \nu\}$

Dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dk}{dt}(t) = k(t)^\alpha r(t)^\beta - n(t)k(t) - c(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = nP(t) \\ \frac{ds}{dt}(t) = -r(t) - n(t)s(t) \\ \frac{dc}{dt}(t) = \nu(t)c(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dK}{dt}(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta - C(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) = n(t)P(t) \\ \frac{dS}{dt}(t) = -R(t) \\ \frac{dC}{dt}(t) = (\nu(t) + n(t))C(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) = 0 \end{array} \right\}$$

Relations caractérisant les contraintes  
sur les variables d'état :  $M_4$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0 \\ s \in [s_b, s_0] \\ c \geq c_b \end{array} \right\}$$

Relations caractérisant les contraintes  
sur les variables de contrôle :  $U_4$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq r_{max} \\ n \in [n_{min}, n_{max}] \\ c \leq k^\alpha r^\beta \\ \nu \geq z \end{array} \right\}$$

Le noyau de viabilité de ce système est défini par :

$$\text{Viab}_{f_4}(M_4) := \left\{ \begin{array}{l} (k_0, s_0, P_0, c_0, z_0) \in M_4 | \exists (r(\cdot), n(\cdot), \nu(\cdot)) \text{ et } \exists (k(\cdot), s(\cdot), P(\cdot), c(\cdot), z(\cdot)) \\ \text{solution de (4) vérifiant } (k(0), s(0), P(0), c(0), z(0)) = (k_0, s_0, P_0, c_0, z_0) \end{array} \right\}$$

On sait montrer que la fonction d'équité vérifie :

$$\gamma(k_0, s_0, P_0, c_0) = \text{Sup} \{z | (k_0, s_0, P_0, c_0, z) \in \text{Viab}_{f_4}(M_4)\}$$

et que le noyau de viabilité est l'hypographe de la fonction d'équité (Aubin et Saint-Pierre, 2006).

Cette caractérisation de la fonction d'équité à l'aide d'un noyau de viabilité a de nombreuses conséquences : La fonction d'équité n'est pas nécessairement continue mais elle est semi continue supérieurement. Autrement dit, une infime perturbation des variables d'état peut générer une brusque augmentation de la valeur de la fonction d'équité mais pas une brusque diminution. La connaissance de la fonction d'équité, dérivant de celle du noyau de viabilité associé, permet de déterminer la règle des décisions équitables  $x_4 \rightarrow R_4(x_4) \subset U_4(x_4)$  telle que pour tout contrôle  $u_4$  choisi dans  $R_4(x_4)$ , on garantit, pour toutes les générations futures, au minimum le score d'équité  $\gamma(x_4(t))$ . Le long d'une évolution équitable  $t \rightarrow x_4(t)$  la fonction d'équité est non décroissante. Autrement dit, la fonction  $t \rightarrow \gamma(x_4(t))$  est non décroissante : si la génération actuelle (situation initiale) entreprend les actions (contrôles) nécessaires pour être équitable vis-à-vis des générations futures et si toutes les générations futures ont elles-mêmes le même comportement, la valeur du seuil d'équité ne peut pas diminuer : la situation en termes de perte de capacité de consommation ne peut que s'améliorer. Enfin, la fonction d'équité n'est généralement pas une fonction analytique mais l'algorithme de viabilité permet de la calculer numériquement

## Références

- [1] Asheim, G., 2005. Intergenerational ethics under resource constraints, *Swiss Journal of Economics and Statistics*, 141, 313–330.
- [2] Asheim, G., 2007. *Justifying, Characterizing and Indicating Sustainability*, Springer.
- [3] Asheim, G., Buchholz, W., Tungodden, B., 2001. Justifying sustainability, *Journal of Environmental Economics and Management*, 41, 252–268.
- [4] Aubin, J.-P., 1991. *Viability Theory*, Birkhäuser.
- [5] Aubin, J.-P., 1996. Une Métaphore Mathématique du principe de précaution, *Natures, Sciences, Sociétés*, 4, 146–154.
- [6] Aubin, J.-P., 1997. *Dynamic Economic Theory : A Viability Approach*, Springer-Verlag.
- [7] Aubin, J.-P., Bernardo, T., Saint-Pierre, P., 2004. A viability approach to global climate change issue, dans A. Haurie et L. Viguier (eds), *The Coupling of Climate and Economic Dynamic, Essays on Integrated Assessment*, Boston, Kluwers Academic Publishers, 1–31.
- [8] Aubin, J.-P., Saint-Pierre, P., 2005. Des “noyaux” dans les quotas de pêche, *La Recherche*, 385, 80–81.
- [9] Aubin, J.-P., Saint-Pierre, P., 2006. Guaranteed Inertia Functions in Dynamical Games, *International Game Theory Review*, 8 (2), 1–34.
- [10] Aubin, J.-P., Saint-Pierre, P., 2007. An introduction to viability theory and management of renewable resources, dans J. Kropp et J. Scheffran (eds), *Advanced Methods for Decision Making and Risk Management in Sustainability Science*, Nova Science Publ. Inc., 43–80.
- [11] Aubin, J.-P., 2010. *La mort du devin, l'émergence du démiurge. Essai sur la contingence et la viabilité des systèmes*, Paris, Beauchesne, à paraître.
- [12] Aubin, J.-P., Bayen, A., Saint-Pierre, P., 2010. *Viability Theory : Regulation of Viable and Optimal Evolution*, Springer-Verlag, à paraître.
- [13] Béné, C., Doyen, L., Gabay, D., 2001. A viability analysis for a bio-economic model, *Journal of Ecological Economics*, 36, 385–396.
- [14] Béné, C., Doyen, L., 2003. Sustainability of fisheries through marine reserve : a robust modelling analysis, *Journal of Environmental Management*, 69 (1), 1–13.

- [15] Béné, C., Doyen, L., 2008. Contribution values of biodiversity to ecosystem performances : a viability perspective, *Ecological Economics*, 68 (1-2), 14–23.
- [16] Bernardo, T., 2008. Systèmes d'information et traçabilité dans les exploitations agricoles. Éléments de diagnostic. Thèse, Université de Paris-Dauphine, Paris.
- [17] Bonneuil, N., 2003. Making Ecosystem Models Viable, *Bulletin of Mathematical Biology*, 65, 1081–1094.
- [18] Bonneuil, N., 2000. Viability in Dynamic Social Networks, *Journal of Mathematical Sociology*, 24 (3), 175–182.
- [19] Bonneuil, N., Saint-Pierre, P., 2008. Beyond Optimality : Managing Children, Assets, and Consumption over the Life Cycle, *Journal of Mathematical Economics*, 44 (3–4), 227–241.
- [20] Dasgupta, P., Heal, G., 1974. The optimal depletion of exhaustible resources, *The Review of Economic Studies*, 41, 3–28.
- [21] DeLara, M., Doyen, L., Guilbaud, T., Rochet, M.J., 2007. Is a management framework based on spawning-stock biomass indicators sustainable? A viability approach, *ICES J. Marine Science*, 64, 761–767.
- [22] DeLara, M., Doyen, L., 2008. Sustainable Management of Natural Resources, *Mathematical Models and Methods*, Springer.
- [23] Doyen, L., DeLara, M., Ferraris, J., Pelletier, D., 2007. Sustainability of exploited marine ecosystem through protected areas : a viability model and a corael reef case study, *Ecological Modeling*, 208 (2–4), 353–366.
- [24] Doyen, L., Dumas, P., Ambrosi, P., 2008. Optimal timing of CO2 mitigation policies for a cost-effectiveness model, *Journal of Mathematics and Computer Modeling*, 48, 882–897.
- [25] Frankowska, H., 1993. Lower semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equation, *SIAM J. on Control and Optimization*.
- [26] Hartwick, J., 1977. Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible resources, *American Economic Review*, 97, 972–974.
- [27] Heal, G., 2005. Intertemporal welfare economics and the environment, dans *Handbook of Environmental Economics*, vol. 3, Maler, K.-G. et J.-F. Vincent (eds), p. 1105–1145.
- [28] Hotelling, H., 1931. The economics of exhaustible resources, *Journal of Political Economy*, 39, 137–175.
- [29] Koopmans, T.C., 1960. Stationary ordinal utility and impatience, *Econometrica*, 8 (2), 287–309.
- [30] Martin, S., 2004. The cost of restoration as a way of defining resilience : a viability approach applied to a model of lake eutrophication, *Ecology and Society*, 9 (2), 8.
- [31] Martin, S., 2005. La résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux. Thèse, ENS Cachan.
- [32] Martinet, V., Doyen, L., 2007. Sustainability of an economy with an exhaustible resource : a viable control approach, *Resource and Energy Economics*, 29, 17–39.
- [33] Martinet, V., Thébaud, O., Doyen, L., 2007. Defining viable recovery paths towards sustainable fisheries, *Ecological Economics*, 64, 411–422.
- [34] Pezzey, J.C.V., 1997. Sustainability constraints versus “optimality” versus intertemporal concern, and axioms versus data, *Land Economics*, 73 (4), 448–466.
- [35] Ramsey, F.P., 1928. A mathematical theory of savings, *The Economic Journal*, 38 (152), 543–559.
- [36] Rapaport, A., Terreaux, J.-P., Doyen, L., 2006. Viability analysis for the sustainable management of renewable resource, *Journal of Mathematics and Computer Modeling*, 43, 466–483.
- [37] Saint-Pierre, P., 1994. Approximation of the viability kernel, *Applied Mathematics & Optimisation*, 29, 187–209.
- [38] Saint-Pierre, P., 1997. Le calcul du noyau de viabilité, outil d'analyse des modèles dynamiques de systèmes contraints, *Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement*, Elsevier, Paris.
- [39] Solow, R.M., 1974. Intergenerational equity and exhaustible resources, *The Review of Economic Studies*, 41, 29–45.
- [40] Tichit, M., Hubert, B., Doyen, L., Genin, D., 2004. A viability model to assess the sustainability of mixed herd under climatic uncertainty, *Animal Research*, 53, 405–417.
- [41] Tichit, M., Doyen, L., Lemel, J.-Y., Renault, O., 2007. A co-viability model of grazing and bird community management in farmland, *Ecological Modeling*, 206 (3–4), 277–293.
- [42] Weitzman, M.L., 1976. On the welfare significance of national product in a dynamic economy, *The Quarterly Journal of Economics*, 90 (1), 156–162.