Les Cahiers du GERAD ISSN : 0711–2440

Modèle journalier de gestion de systèmes hydriques tenant compte de l'erreur de prévision météorologique

S. Krau, M. Latraverse,
D. Tremblay, A. Turgeon

G–2006–42

Juin 2006

Modèle journalier de gestion de systèmes hydriques tenant compte de l'erreur de prévision météorologique

Stéphane Krau

GERAD et
Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

Marco Latraverse
Denis Tremblay

Hydro-Québec

André Turgeon

GERAD et
Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

Juin 2006

Les Cahiers du GERAD

G–2006–42

Résumé

Dans un contexte de gestion journalière, on dispose le plus souvent d'une prévision météorologique déterministe pour calculer les apports futurs probables aux différents sites d'un système hydrique. L'opérateur d'un système hydrique a besoin d'évaluer les risques futurs d'inondations et/ou de déversements associés à l'incertitude de la prévision météorologique. À notre connaissance, il n'existe pas d'application de modèle de gestion construit directement à partir d'une caractérisation de l'erreur de prévision météorologique. Nous proposons un modèle de gestion journalier au sein duquel les apports hydrauliques possibles représentant l'incertitude de la prévision déterministe sont représentés par un arbre de scénarios d'apports. Cet arbre s'obtient à partir d'un bruitage temporel et d'un bruitage spatial des grilles journalières de précipitations de la prévision météorologique déterministe.

Abstract

The meteorological forecast for the next days is usually not enough detailed to determine the exact probability distribution of the forecasted precipitation, and hence the probability distribution of the forecasted inflow to the river basin. The river basin manager has, however, the responsibility of evaluating the risks of flooding and violating constraints when operating the reservoirs. This paper deals with the problems of modeling the forecast error and determining an operating policy that takes into account that error. This is accomplished by, first, building an inflow scenario tree that takes into account the forecast errors and, then, solving the reservoir management problem with that tree. The paper describes how the tree was built.

1 Introduction

La gestion d'un système hydrique implique fréquemment la poursuite de divers objectifs divergents. Il faut optimiser la production des centrales hydroélectriques mais aussi régulariser les débits des rivières, assurer l'approvisionnement en eau potable, respecter les contraintes de villégiature et assurer la sécurité des riverains, tout comme celle des ouvrages. Les modèles de gestion tiennent le plus souvent compte de ces différents objectifs par le biais de contraintes souples, c'est-à-dire de contraintes dont on tolère la violation, tout en tentant de minimiser le coût global engendré par ces violations potentielles. La gestion journalière peut alors être ramenée à un problème d'optimisation stochastique d'un objectif unique. Il s'agit de déterminer pour la journée courante les soutirages aux réservoirs qui maximisent l'espérance des profits futurs, ceux-ci étant définis comme la différence entre la valeur de la production hydraulique et le coût global de violation des contraintes.

La gestion d'un système hydrique devient particulièrement critique lors de périodes de forte hydraulicité. Plusieurs contraintes peuvent alors être menacées de violation et les marges de manœuvre deviennent fort minces. Dans ces contextes, les systèmes hydriques au fil de l'eau sont les plus vulnérables à cause de leur faible capacité de stockage et des zones habitées qu'ils traversent. Une représentation adéquate de l'incertitude des apports hydrauliques à l'intérieur d'un modèle de gestion devient alors essentielle.

L'incertitude des apports hydrauliques provient des erreurs de calibrage des paramètres du modèle hydrologique, de l'incertitude sur l'état hydraulique des bassins versants, et de l'imprécision de la prévision météorologique. La prévision météorologique est en général basée sur un modèle météorologique déterministe, ne proposant qu'un seul scénario de précipitations et de températures sur un horizon d'une dizaine de jours. Évidemment cette prévision n'est pas parfaite et on a intérêt à connaître son incertitude afin de pouvoir procéder à une gestion robuste du système hydrique.

Nous proposons de formuler le problème de gestion journalière par un programme mathématique stochastique multi-stades avec recours au sein duquel est représentée l'incertitude de la prévision météorologique déterministe émise. Nous présenterons les méthodes de bruitages, permettant de transformer une prévision météorologique déterministe en une prévision météorologique probabiliste et de construire un arbre de scénarios d'apports hydrauliques. Le modèle est en voie d'être testé sur le système hydrique de la Gatineau, d'Hydro-Québec.

2 Formulation générale du problème de gestion

La problématique de gestion d'un système hydrique a été abondamment traitée dans la documentation scientifique. En partant de sa formulation mathématique générale, Labadie (2004) montre qu'un modèle de gestion d'un système hydrique peut s'écrire comme un problème d'optimisation stochastique non linéaire, non convexe et possiblement de grande taille. Il dresse l'état de l'art des diverses approches utilisées en pratique pour le résoudre. Nous choisissons l'approche par programmation linéaire. Cette approche est fréquemment utilisée (Loucks 1981) car on peut aisément y modéliser les contraintes liant temporellement des décisions, par exemple les contraintes portant sur les délais d'écoulements entre les réservoirs ou celles associées aux bornes de variations de débits. Cette approche bénéficie en pratique de la robustesse et de la performance des logiciels commerciaux de programmation linéaire.

L'obtention d'un modèle linéaire de gestion s'obtient en approximant les fonctions non linéaires séparables et les fonctions non linéaires non séparables (les fonctions de production) au voisinage d'un point donné par des fonctions linéaires par morceaux. La problématique de trouver les soutirages de la journée courante $t$qui maximisent l'espérance des profits futurs se formule alors comme un programme mathématique linéaire stochastique multi-stades avec recours (Birge et al. 1997). Ce programme peut se reformuler en un programme mathématique linéaire déterministe appelé *l'équivalent déterministe* (Birge et al. 1987). Il suffit pour cela de connaître les distributions discrètes des apports journaliers, puis de construire l'arbre de décisions issu de ces distributions.

Le modèle de gestion se présente comme un programme mathématique linéaire par morceaux, pouvant être résolu par une méthode d'approximations linéaires successives. Des programmes mathématiques linéaires sont construits itérativement, puis résolus à l'aide d'un algorithme du simplexe avec critère restreint d'entrée dans la base, permettant ainsi que les sous variables introduites lors de la linéarisation soient remplies de la gauche vers la droite. L'équation (1) donne la formulation générale de ces programmes mathématiques linéaires.

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \text{Max } c_0 x_0 &+ \sum_{k_1=1}^{K_1} p_1^{k_1} c_1^{k_1} x_1^{k_1} + \sum_{k_1=1}^{K_1} \sum_{k_2=1}^{K_2(k_1)} p_2^{k_1 k_2} c_2^{k_1 k_2} x_2^{k_1 k_2} + \cdots + \\ &+ \sum_{k_1=1}^{K_1} \sum_{k_2=1}^{K_2(k_1)} \cdots \sum_{k_T=1}^{K_T(k_{T-1})} p_T^{k_1 \dots k_T} \left(c_T^{k_1 \dots k_T} x_T^{k_1 \dots k_T} + y^{k_1 \dots k_T} \right) \end{aligned}$$

sujet à :

$$\begin{cases} A_0 x_0 & = [a_0] & \\ A_{10} x_0 + A_{11} x_1^{k_1} & = [a_1^{k_1}] & ; k_1 = 1 \dots K_1 \\ A_{20} x_0 + A_{21} x_1^{k_1} + A_{22} x_2^{k_1 k_2} & = [a_2^{k_1 k_2}] & ; k_2 = 1 \dots K_2(k_1), \forall\, k_1 = 1 \dots K_1 \\ \quad \dots \quad \dots & & \\ \dots + A_{TT-1} x_{T-1}^{k_1 \dots k_{T-1}} + A_{TT} x_T^{k_1 \dots k_T} & = [a_T^{k_1 \dots k_T}] & ; k_T = 1 \dots K_T(k_{T-1}), \dots, \forall\, k_1 = 1 \dots K_1 \\ y^{k_1 \dots k_T} \le h_i(x_T^{k_1 \dots k_T}; b_T^{k_1 \dots k_T}) & & ; i = 1 \dots I, k_T = 1 \dots K_T(k_{T-1}), \dots, \forall\, k_1 = 1 \dots K_1 \\ \underline{x}_t^{k_1 \dots k_t} \le x_t^{k_1 \dots k_t} \le \overline{x}_t^{k_1 \dots k_t}, y^{k_1 \dots k_T} \ge 0 & & ; k_T = 1 \dots K_T(k_{T-1}), \dots, \forall\, k_1 = 1 \dots K_1 \end{cases}$$

avec :

K_1 : le nombre de nœuds (apports discrets) du second stade de l'arbre.

$K_t(k_{t-1})$: le nombre de successeurs du nœud k_{t-1} du stade t-1 de l'arbre. $\forall\, k_{t-1} = 1 \ldots N_{t-1}$.

N_{t-1} : le nombre de nœuds du stade t-1 de l'arbre.

$N_T = \sum_{k_1=1}^{K_1} \sum_{k_2=1}^{K_1(k_1)} \cdots \sum_{k_T=1}^{K_{T-1}(k_{T-1})} 1$: le nombre de scénarios de l'arbre de décisions.

$x_t^{k_1 \ldots k_t} = (v, q, d, s)_t^{k_1 \ldots k_t}$: le vecteur de décision associé à la dernière branche du chemin $(k_1 \ldots k_t)$ de l'arbre de décision, $k_t = 1 \ldots K_t(k_{t-1}), \ldots, \forall\, k_1 = 1 \ldots K_1; \forall\, t = 1 \ldots T$.

v, q, d, s : respectivement, les variables de type volume, débit turbiné, débit déversé et artificiel, nécessaires à la modélisation.

$a_t^{k_1 \ldots k_t}, p_t^{k_1 \ldots k_{t-1} k_t}$: respectivement, l'apport et la probabilité conditionnelle associés à la dernière branche du chemin $(k_1 \ldots k_t)$ de l'arbre de décision.

$c_t^{k_1 \ldots k_t}, \underline{x}_t^{k_1 \ldots k_t}, \overline{x}_t^{k_1 \ldots k_t}, A_{t_1 t_2}$: les paramètres du programme issus de la modélisation du système hydrique et des contraintes d'exploitations.

$h_i(x_T^{k_1 \ldots k_T}; b_T^{k_1 \ldots k_T})$: i ième hyperplan de support de l'espérance des profits futurs associé au scénario de l'arbre correspondant au chemin $(k_1 \ldots k_T)$. Les équations des hyperplans de support sont obtenues de manière exogène, à partir d'un module d'optimisation moyen terme, écrit sous la forme d'un algorithme de programmation dynamique stochastique (Turgeon 2006).

On remarque que la taille de la matrice des contraintes augmente linéairement avec le nombre de nœuds de l'arbre des apports. Dans les cas où la taille de l'arbre devient trop importante, des compromis de modélisation et/ou l'utilisation de méthodes de décomposition (Birge 1985) deviennent alors nécessaires pour résoudre ce programme.

3 Caractérisation de l'erreur de la prévision météorologique

L'incertitude sur la prévision météorologique est prédominante par rapport aux autres sources d'incertitudes reliées à un modèle de prévision hydrologique (Krzysztofowicz et al. 1999). Coulibaly et al. (2003) montre que, même pour d'assez grandes erreurs, la prévision météorologique améliore significativement la précision sur la prévision des apports sur un horizon de 7 jours. De nombreuses méthodes on été développées pour caractériser l'incertitude reliée à la prévision des apports (Tamea et al. 2005 ; Collishonn et al. 2004 ; Lefebvre et al. 2004). Maskey et al. (2004) proposent une approche qui permet de représenter l'incertitude de la prévision météorologique au sein d'un modèle hydrologique déterministe. Il n'existe pas, à notre connaissance, de modèle de gestion intégrant explicitement l'incertitude de la prévision météorologique.

La prévision météorologique déterministe que nous considérons est fournie à Hydro-Québec par Environnement Canada et se présente sous la forme d'un ensemble de grilles aux 6 heures sur un horizon de 9 jours, soit 36 grilles en tout. Les premières 48 heures sont générées par le modèle régional de climat (pas 15 km) et sont disponibles par blocs de 6 heures, tandis que les jours 3 à 9 sont générés par le modèle global (pas 110 km) et sont disponibles par blocs de 12 heures. Des prévisionnistes d'Hydro-Quebec apportent une plus value sur les premières 24 heures, font la fusion entre le régional et le global, tout en produisant des blocs de 6 heures pour toute la période, puis interpolent aux 10 km. Les 36 grilles de précipitations prévues sont ensuite fusionnées en 9 grilles de prévisions journalières. Les grilles de prévision journalière sont fixes, c'est-à-dire qu'elles couvrent une même région géographique. En chacun des points de grilles (espacés de 10 km), on trouve une quantité de précipitation totale prévue ainsi que des températures minimum et maximum journalières prévues.

Soit la journée courante t et une prévision météorologique déterministe émise sur T jours, il y a T grilles de prévisions météorologiques journalières émises :

$\hat{\Pi}_{(t+T)|t}$: grille de prévision journalière pour la journée $t+T$, émise la journée $t; t = 0 \ldots T$

$\hat{z}_{(t+k)|t}$: quantité de précipitation prévue au point (i, j) pour la journée $(t + k)$, émise la journée t

$\hat{T}^{\min}_{i,j,(t+k)|t}$: température minimum prévue au point (i, j), pour la journée $(t + k)$, émise la journée t

$\hat{T}^{\max}_{i,j,(t+k)|t}$: température maximum prévue au point (i, j), pour la journée $(t + k)$, émise la journée t

(x_i, y_j) : coordonnées en latitude et en longitude du point de grille $(i, j) \in (I \times J)$

I : nombre de points de grille en longitude

J : nombre de points de grille en latitude

Nous proposons une caractérisation des erreurs de prévision relativement à la quantité de précipitation prévue et à partir de l'historique des écarts entre les grilles de prévisions et les grilles d'observations. Les grilles d'observations sont construites à partir d'une extrapolation des valeurs enregistrées aux stations d'observations disséminées sur les bassins versants du système hydrique. Soit l'équation (2) liant la quantité de précipitation prévue à la prévision de précipitation émise la journée t pour la journée $(t + k)$, au point de grille (i, j).

$$z_{i,j,(t+k)} = \varepsilon_{i,j,(t+k)|t}(\hat{z}_{i,j,(t+k)|t}); \forall\, t; \forall\, (i, j) \in I \times J; k = 0 \ldots T - 1 \tag{2}$$

où :

$z_{i,j,(t+k)}$: variable aléatoire représentant la quantité de précipitation observée au point (i, j), pour la journée $(t + k)$.

$\varepsilon_{i,j,(t+k)|t}(x)$: fonction aléatoire représentant l'incertitude d'une prévision déterministe émise la journée t, au point (i, j), pour la journée $(t + k)$.

Les fonctions $\varepsilon_{i,j,(t+k)|t}(x)$ sont corrélées spatialement et temporellement et la détermination complète de leurs paramètres est complexe, voire impossible, étant donnée l'étendue spatio-temporelle du domaine.

L'incertitude de la prévision se compose de trois formes d'incertitudes : (1) l'incertitude sur la quantité totale de précipitation prévue sur l'horizon prévisionnel, (2) l'incertitude sur la distribution temporelle de la précipitation, (3) l'incertitude sur la distribution spatiale de la précipitation. Nous représentons les deux premières incertitudes par un bruitage (transformation aléatoire des données) que nous appelons *bruitage temporel de la précipitation prévue*. Nous appelons *bruitage spatial de la précipitation prévue*, l'incertitude relative à la distribution spatiale de la précipitation prévue sur l'horizon prévisionnel. Nous supposons que ces deux bruitages sont indépendants. Ces bruitages sont des variantes des bruitages proposés par Latraverse (2001) concernant les mêmes grilles de prévision sur un horizon de deux jours. Les bruitages que nous proposons permettent de transformer une prévision météorologique déterministe en une prévision probabiliste ayant la forme d'un arbre de scénarios.

4 Bruitage temporel de la précipitation prévue

Le bruitage temporel consiste à raisonner non pas sur les quantités de précipitations prévues aux points de grille mais sur les quantités totales de précipitations sur les grilles. Soit la notation suivante :

$$\hat{q}_{(t+k)|t} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\hat{z}_{i,j,(t+k)|t} \qquad ; k = 0\ldots T-1, \forall\, t$$

$$q_{(t+k)} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{i,j,(t+k)} \qquad ; k = 0\ldots T-1, \forall\, t$$

Latraverse (2001) montre que les erreurs de prévision sur ces quantités sont indépendantes d'une journée à l'autre. La variable aléatoire $q_{(t+k)}$, associée à la quantité de précipitation totale observée sur la grille pour la journée $t+k$, vérifie l'équation (3) :

$$(3) \qquad q_{(t+k)} = f(\hat{q}_{(t+k)|t}); k = 0\ldots T-1; \forall\, t$$

où :
$f(\hat{q}_{(t+k)|t})$: une variable aléatoire.

Nous proposons de discrétiser la fonction $f(x)$ par la variable aléatoire discrète $\Psi_1^v(\hat{q}_{(t+k)|t})$.

Soit un historique de grilles de prévisions et de grilles d'observations et les ensembles suivant :

$\hat{A}_k = \left\{\hat{q}_{(t+k)|t}; t = \underline{t_h} \dots \overline{t_h} - k\right\}; k = 0 \dots T-1$

$A_k = \left\{q_{(t+k)}; t = \underline{t_h} \dots \overline{t_h} - k\right\}; k = 0 \dots T-1$

$\underline{t_h}$: date de début de l'historique

$\overline{t_h}$: date de fin de l'historique

K : nombre de journées d'un horizon de prévision type

L'ensemble $\hat{A}_k$ est composé des quantités de précipitations prévues, tirées d'un historique de prévisions, et associées à la k-ième journée. L'ensemble A_k est composé des quantités observées de précipitations correspondant aux éléments de $\hat{A}_k$.

Soit $\hat{E}_k^v$ respectivement E_k^v, le sous ensemble de l'ensemble $\hat{A}_k$ constitué des v éléments les plus proches de $\hat{q}_{(t+k)|t}$, respectivement le sous ensemble de l'ensemble A_k constitué des observés associés aux éléments de $\hat{E}_k^v$.

Soit un partitionnement arbitraire de E_k^v en N_k classes $(k = 0 \dots T-1)$:

$$\begin{cases} E_k^v = C_k^1 \cup \dots \cup C_k^{N_k} \\ C_k^{i_k} \cap C_k^{j_k} = \emptyset; \forall\, i, j; i_k = 1 \dots N_k; j_k = 1 \dots N_k \\ c_k^{i_k} \text{ le barycentre de la classe } C_k^{i_k}; i_k = 1 \dots N_k; \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire $\Psi_1^v(\hat{q}_{t+k})$ par les N_k quantités de précipitations et l'équation (4) :

$$\text{(4)} \quad \text{Prob}\,[\Psi_1^v(\hat{q}_{t+k}) = c_k^{i_k}] = P_1(k, i_k) = \frac{|C_k^i|}{|E_k^v|}; i_k = 1 \dots N_k; k = 0 \dots T-1, \text{ étant donné } t.$$

Soit une prévision météorologique déterministe de quantités totales de précipitations journalières $\left\{\hat{q}_{t|t}, \hat{q}_{t+1|t}, \dots, \hat{q}_{t+T-1|t}\right\}$ émise au début de la journée courante t. On peut, à partir des distributions des variables aléatoires discrètes $(\Psi_1^v(\hat{q}_{t+k}); k = 0 \dots T-1)$, construire un arbre d'événements qui représente les scénarios des quantités de précipitations probables. Avec autant de stades que de journées de l'horizon prévisionnel, la taille de l'arbre devient gigantesque, même si l'horizon de prévision est limité à seulement une dizaine de jours. Nous recourons à un algorithme de réduction d'arbre de scénarios (Romisch et al. 2003) pour ne garder qu'un nombre limité de scénarios formant un arbre réduit statistiquement proche de l'arbre original. Nous prenons pour la suite du document la notation suivante :

N'_k : Le nombre de nœuds de l'arbre réduit pour le stade k

i_k^- : Le prédécesseur du i_k ième nœud du stade k de cet arbre ; $i_k = 1 \dots N'_k$, pour $k = 0 \dots T-1$.

$d_k^{i_k}$: la quantité de précipitation associée au nœud i_k de l'arbre réduit, $k = 0 \dots T-1$.

5 Bruitage spatial de la précipitation prévue

L'incertitude sur la distribution spatiale des précipitations est importante dans la caractérisation des erreurs de prévisions relativement à la problématique de gestion d'un système hydrique. En effet, les risques d'inondations ou de déversements d'un système hydrique, pour une quantité de précipitation donnée, diffèrent fortement suivant la répartition des précipitations sur les bassins versants composant le système hydrique étudié.

Nous supposons, pour fin de modélisation, que les distributions spatiales des points de grilles de toutes les grilles de la prévision déterministe demeurent invariantes ; seul change le positionnement géographique des grilles de prévision. Le bruitage spatial a la forme de translations spatiales des grilles de la prévision météorologique déterministe. Les paramètres de ces translations sont calculés à partir des erreurs de prévisions sur la localisation du point de précipitation maximum associé à la première grille de prévision. Les grilles de prévisions couvrent, en réalité, une région plus grande que les bassins versants du système hydrique, ce qui permet après translations d'avoir une couverture complète des bassins versants du système hydrique par les grilles translatées.

Le choix de cette modélisation réside dans l'approximation du phénomène météorologique suivant. Les systèmes dépressionnaires suivent en général une même direction. Dans le cas du système hydrique de la Gatineau, les systèmes circulent d'ouest en est. Nous tentons dans cette modélisation de capter le fait que le système dépressionnaire prévu peut passer plus au nord, ou plus au sud, tout en gardant la distribution spatiale originale de ses précipitations.

Soit les notations suivantes :

$(\bar{i},\bar{j})$: Les indices du point de grille de précipitation maximum sur la première grille de prévision : $\hat{z}_{\bar{i},\bar{j},t|t} = \text{Max}\left\{\hat{z}_{i,j,t|t}\,; i \in I, j \in J\right\}$

$(\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{j}})$: les coordonnées prévues, en longitude et en latitude, du point de grille $(\bar{i},\bar{j})$

$(x_{\bar{i}},y_{\bar{j}})$: la variable aléatoire correspondant aux coordonnées observés du point de grille $(\bar{i},\bar{j})$

L'équation d'erreur de prévision sur la localisation du point de précipitation maximum s'écrit :

$(x_{\bar{i}},y_{\bar{j}}) = g(\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{j}})$

$g(\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{j}})$: une variable aléatoire

Nous proposons de discrétiser la fonction $g(\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{j}})$ par la variable aléatoire discrète $\Psi_2(\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{j}})$.

Nous faisons l'hypothèse que les erreurs de prévision en longitude et en latitude du point de précipitation maximum sont indépendantes et suivent des lois normales :

Soit $R(R >> 1)$ points $(e_{r,1}, e_{r,2})$, générés à partir d'une localisation prévue du point de précipitation maximum et des lois normales des erreurs sur la latitude et la longitude.

Soit $A_l; l = 1 \dots L$ les différents bassins versants du système hydrique et ($u_l = (x_l, y_l)$, $(\forall\, l = 1 \dots L)$), le point qui minimise la somme des distances entre lui et tous les points générés appartenant au bassin versant $A_l(\forall\, l = 1 \dots L)$. Soit $u^* = (x^*, y^*)$ le point qui minimise la somme des distances entre lui et tous les points générés qui n'appartiennent à aucun des bassins versants du système hydrique. Les équations (5) et (6) définissent alors la variable aléatoire $\Psi_2(\hat{x}_{\bar{i}}, \hat{y}_{\bar{j}})$.

$$(5) \quad \text{Prob}\left[\Psi_2(\hat{x}_{\bar{i}}, \hat{y}_{\bar{j}}) = (x_l, y_l)\right] = P_2(l) = \frac{\sum\limits_{r|(e_{r,1}, e_{r,2}) \in A_l}^{1}}{R}; l = 1 \dots L;$$

$$(6) \quad \text{Prob}\left[\Psi_2(\hat{x}_{\bar{i}}, \hat{y}_{\bar{j}}) = (x^*, y^*)\right] = P_2(L+1) = 1 - \sum_{l=1}^{L} P_2(l)$$

Le bruitage spatial correspond à $L + 1$ déplacements de toutes les grilles de prévision. Chaque déplacement est défini par la translation qui fait correspondre le point de précipitation maximum, associé à la première grille de prévision, avec une des $L + 1$ localisations. Les températures minimum et maximum prévues aux points de grilles sont mises à jour en fonction de leurs altitudes relativement à celles qu'ils avaient avant translations. Un point de grille associé à une altitude géographique donnée verra, par exemple, sa température prévue descendre si, après translation, ce point de grille a une altitude plus importante.

6 Composition des bruitages

Le *bruitage temporel de la précipitation prévue* permet d'obtenir un arbre de précipitations probables. Le *bruitage spatial de la précipitation prévue* génère des séries de grilles de prévisions translatées par rapport aux grilles de la prévision déterministe originale. La composition des deux bruitages permet d'obtenir un arbre de scénarios de grilles de prévisions probabilistes.

Soit l'équation (7), les grilles de prévisions de la prévision déterministe émise au début de la journée t.

$$(7) \quad \hat{\Pi}_{(t+k)|t} = \left\{(x_i, y_j, \hat{z}_{i,j,(t+k)|t}), \hat{T}^{\min}_{i,j,(t+k)|t}, \hat{T}^{\max}_{i,j,(t+k)|t}; \forall\, i, j \in \mathrm{I} \times J\right\}; k = 0 \dots T-1$$

La composition des bruitages permet, pour chaque déplacement obtenu par le bruitage spatial, d'associer l'arbre de scénarios des précipitations obtenu par le bruitage temporel. L'équation (8) donne la formulation des grilles de l'arbre des prévisions ainsi que leurs probabilités conditionnelles que l'on obtient.

$$(8) \quad G_{t+k}(l, i_k) = \left\{(x_{i,l}, y_{i,l}, z^{i_k}_{i,j,t}), T^{\min}_{i,j,(t+k)}(x_{i,l}, y_{i,l}), T^{\max}_{i,j,(t+k)}(x_{i,l}, y_{i,l}); \forall\, i \in I, \forall\, j \in J\right\};$$
$$i_k = 1 \dots N'_k; l = 1 \dots L; k = 0 \dots K-1$$

avec :

$$
\begin{cases}
z^{i_k}_{i,j,t} = \hat{z}_{i,j,t|t}\,\frac{d^{i_k}_k}{\hat{a}_{t|t}} \\
\begin{cases}
T^{\min}_{i,j,(t+k)|t}(x_{i,l},y_{i,l}) = \beta(x_{i,l},y_{i,l},\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{i}})\hat{T}^{\min}_{i,j,(t+k)|t} \\
T^{\max}_{i,j,(t+k)|t}(x_{i,l},y_{i,l}) = \beta(x_{i,l},y_{i,l},\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{i}})\hat{T}^{\max}_{i,j,(t+k)|t}
\end{cases} \\
\beta((x_{i,l},y_{i,l});(\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{i}})) : \text{ coefficient d'ajustement en fonction de l'altitude des points} \\
\qquad\qquad (x_{i,l},y_{i,l}) \text{ et } (\hat{x}_{\bar{i}},\hat{y}_{\bar{i}}) \\
\begin{cases}
x_{i,l} = x_i + (x_l - \hat{x}_{\bar{i}}) \\
y_{i,l} = y_j + (y_l - \hat{y}_{\bar{i}})
\end{cases} \\
\\
\begin{cases}
\text{Prob } [\Pi_t = G_t(l,i_k)] = P_2(l) \times P_1(0,i_0); l = 1 \ldots L+1; i_0 = 1 \ldots N'_0 \\
\text{Prob } [\Pi_{t+k} = G_{t+k}(l,i_k)] = P_1(k,i_k); l = 1 \ldots L+1; i_k = 1 \ldots N'_k; k = 1 \ldots T-1
\end{cases}
\end{cases}
$$

Le modèle hydrologique distribué (Hydrotel) transforme l'arbre des grilles de prévisions en un arbre de scénarios d'apports conservant la même structure et les mêmes probabilités conditionnelles. Cet arbre peut être transformé en un arbre de décision dont est issu le programme mathématique (équation (1)). Il suffit, en premier lieu, de fusionner (équation (9)) les apports de la journée courante des scénarios générés par Hydrotel puis de mettre à jour (équations (9) et (10)) les probabilités sur les branches du second stade (correspondant à la journée du lendemain).

$$(9) \quad a_0 = \sum_{l=1}^{L} \sum_{i_0=0}^{N'_0} P_1(0,i_0) \times P_2(l) \times a'_t(l,i_0)$$

avec : $a'_t(l,i_0)$: apport calculé par le modèle Hydrotel et issu de la grille $G_t(l,i_0)$

$$(10) \quad p_1^{k_1} = P_2(l) \times P_1(0,i_1^-) \times P_1(1,i_1)$$

avec : $k_1 = i_1 + (l-1) \times L \times N'_1; l = 1 \ldots L; i_1 = 1 \ldots N'_1$.

7 Conclusion

L'intégration de l'incertitude de la prévision météorologique au sein d'un modèle journalier de gestion d'un système hydrique peut améliorer de façon importante la sécurité de son exploitation, en particulier lorsque l'état hydraulique de ce système est proche de ses bornes d'exploitation. La caractérisation exacte de l'incertitude des grilles de prévisions est complexe voire impossible à réaliser, étant donné le vaste domaine spatio-temporel devant être considéré. Des agrégations (bruitages) sont alors nécessaires pour réduire la complexité du problème tout en essayant de capter la variabilité des conditions météorologiques futures probables. Nous proposons comme modèle de gestion un modèle linéaire par morceaux au sein duquel la représentation de l'incertitude de la prévision météorologique prend la forme d'un arbre de scénarios d'apports.

Dans le processus opérationnel, ce modèle de gestion est initialisé au début de chaque journée à partir de la prévision déterministe et doit pouvoir être résolu assez rapidement, afin que les décisions concernant les soutirages aux réservoirs se prennent à temps. La transformation de l'arbre de grilles de prévision en l'arbre de scénarios d'apports par le modèle hydrologique est l'étape la plus coûteuse du point de vue du temps de calcul, ce qui limite le nombre de scénarios météorologiques de l'arbre que l'on peut construire. Les paramètres des méthodes de bruitages permettent cependant de “ choisir ” les scénarios météorologiques que l'on veut voir être représenté dans l'arbre de prévisions. Cela permet de quantifier, sur l'horizon prévisionnel, les risques d'inondations et/ou de déversements associés à des scénarios météorologiques extrêmes.

Dans notre travail, nous nous sommes limités à la caractérisation de l'incertitude de la prévision de précipitation, laissant de côté les apports dus à la fonte de la neige. Cela nous contraint donc à tester cette approche lors de l'été ou de l'automne, alors que la température n'influe que très peu sur la transformation des précipitations en apports. Le modèle de gestion proposé et couplé au modèle hydrologique Hydrotel, est en voie d'être testé sur le système hydrique de la Gatineau, à partir d'un historique de plusieurs années des erreurs de prévisions. Si les résultats s'avèrent encourageants, nous intégrerons la considération de la température afin de rendre le modèle applicable à la crue printanière.

Références

Birge, J. R. and Louveaux, F., 1997. *Introduction to Stochastic Programming.* Springer Verlag, New York.

Birge, J. R., Dempster, M., Gassmann, H., Gunn, E., King, A., and Wallace, S., 1987. A standard input format for multiperiod stochastic linear programs. *Committee on Algorithms Newsletter*, 17, 1–19.

Birge, J. R., 1985. Decomposition and partitioning methods for multi-stage stochastic linear programs. *Operations Research*, 33, 989–1007.

Coulibaly, P., 2003. Impact of meteorological predictions on real-time sprint flow forecasting. *Hydrological Processes*, 17, 3791–3801.

Heitsch, H., Romisch, W., 2003. Scenario reduction algorithms in stochastic programming. *Computational Optimization and Applications*, 24, 187–206.

Krzysztofowicz, R., 1999. Bayesian theory of probabilistic forecasting via deterministic hydrologic model. *Water Resource Research*, 35, 2739–2750.

Labadie, J. W., 2004. Optimal Operation of Multireservoir Systems : State-of-the-Art Review. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 130, 93–111.

Latraverse, M., 2001. *Prévision des apports à court et moyen terme et amélioration de la gestion des systèmes au fil de l'eau.* Hydro-Quebec Poduction, Rapport interne.

Lefebvre, M., 2004. Modélisation des erreurs pour le système de prévision PREVIS. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 31, 892–897.

Loucks, D. P., 1981. Multiple-Reservoir Operation in North America. *Water Science and Technology*, 1, 711–728.

Tamea, S., Laio, F., Ridolfi, L., 2005. Probabilistic nonlinear prediction of river flows. *Water Resources Research*, 41 (9), W09421.

Turgeon, A., 2005. Solving a stochastic reservoir management problem with multilag autocorrelated inflows. *Water Resources Research*, 41 (12), W12414.