

**Chargement optimal des
groupes turbo-alternateurs**

H. Achour
P. Hansen

G-2004-91

Décembre 2004

Les textes publiés dans la série des rapports de recherche HEC n'engagent que la responsabilité de leurs auteurs. La publication de ces rapports de recherche bénéficie d'une subvention du Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies.

Chargement optimal des groupes turbo-alternateurs

Heykel Achour

GERAD et Département de mathématiques et de génie industriel

École Polytechnique de Montréal

C.P. 6079, Succ. Centre-ville

Montréal (Québec) Canada H3C 3A7

heykel.achour@gerad.ca

Pierre Hansen

GERAD et Méthodes quantitatives de gestion

HEC Montréal

3000, chemin de la Côte-Sainte-Catherine

Montréal (Québec) Canada H3T 2A7

pierre.hansen@gerad.ca

Décembre 2004

Les Cahiers du GERAD

G-2004-91

Copyright © 2004 GERAD

Résumé

Les problèmes de chargement statique de groupes turbo-alternateurs à vapeur peuvent être exprimés sous forme de minimisation d'une somme de fonction de coût concaves par morceaux sous des contraintes linéaires. On démontre que pour toute solution optimale un seul groupe au plus fonctionne en dehors d'un point de cassure, c'est-à-dire un point précédant immédiatement l'ouverture d'une soupape d'admission de vapeur. Cette propriété est exploitée dans une procédure d'optimisation par séparation pour la résolution des problèmes de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale et celui de choix des groupes. Cette procédure s'avère très efficace.

Abstract

The economic dispatch problems for vapor turbo-alternator units can be expressed as the minimization of a sum of piecewise concave functions subject to linear constraints. We prove that in any optimal solution at most one unit will produce elsewhere than at a break-point, that is a point immediately preceding the opening of a vapor admission value. This property is exploited in a branch-and-bound procedure to solve the economic dispatch problem with constraints of minimal and maximal power as well as the problem of unit commitment. The resulting procedure is very efficient.

1 Introduction

La production et la distribution de l'électricité sont des activités économiques d'importance primordiale. Leur coût de fonctionnement élevé se chiffre en milliards de dollars et témoigne de l'importance d'une gestion scientifique. Le problème traité dans cet article est celui du chargement optimal des groupes d'une centrale thermique (thermo-électrique). Il vise à déterminer une politique optimale de production des groupes turbo-alternateurs sur une période. Ceci correspond au cas de groupes thermo-électriques avec plusieurs soupapes d'admission de vapeur. Ces problèmes peuvent être exprimés sous forme de minimisation d'une somme de fonctions de coûts concaves par morceaux sous des contraintes linéaires (figure 1). On démontrera pour ces problèmes que pour toute solution optimale, un seul groupe au plus fonctionne en dehors d'un point de cassure, c'est-à-dire un point précédent l'ouverture d'une soupape d'admission de vapeur. Cette propriété est exploitée dans une procédure d'optimisation par séparation pour la résolution des problèmes de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale et celui du choix des groupes.

Parmi les principales méthodes adoptées pour la résolution de ces problèmes, on retrouve la programmation dynamique [1,10,14]. La solution du problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale est basée sur l'équation de Bellman :

$$F_i^*(D_i) = \text{Min}_{P_i}(F_{i-1}^*(D_i - P_i) + F_i(P_i))$$

où :

- $F_i^*(D_i)$: désigne le coût minimum de satisfaction d'une demande D_i en MW en utilisant les groupes $1, 2, \dots, i$,
- P_i : puissance du groupe i .

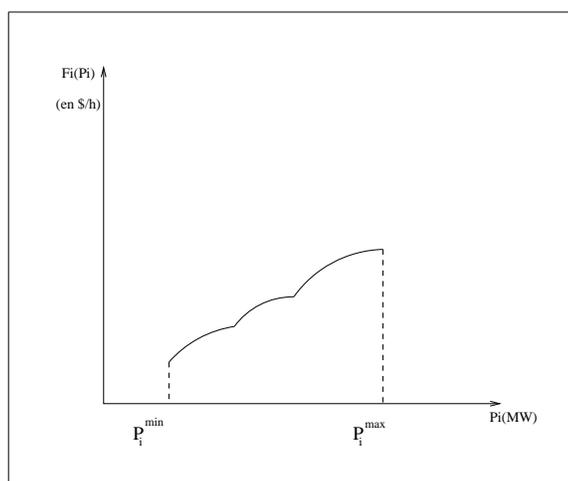


Figure 1: Fonction de coût d'une centrale thermique dont les groupes ont plusieurs soupapes d'admission de vapeur

Cette méthode de résolution peut s'appliquer directement dans le cas où les groupes qui produiront peuvent être choisis parmi un ensemble donné, plutôt que d'être fixés a priori [2,8] (chargement optimal avec choix des groupes). Il faut alors déterminer à la fois les groupes dont la production P_i sera supérieure à zéro ainsi que les valeurs de ces P_i . La solution est basée sur le système suivant :

$$\begin{aligned} F_i^*(D_i) &= \text{Min}_{P_i}(F_{i-1}^*(D_i - P_i) + F_i(P_i)) \\ P_i &\in \{0\} \cup [\max(P_i^{\min}, D_i - D_{i-1}^{\max}, \min(P_i^{\max}, D_i)] \\ D_i &\in [0, D_i^{\max}] \\ i &= 2, \dots, N \end{aligned}$$

Une autre méthode a été proposée par Wood et Wallenberg [14] pour résoudre le problème de choix simultané des groupes et des niveaux de production. Il s'agit d'énumérer tous les sous-ensembles susceptibles de satisfaire la demande totale et de résoudre le problème du choix des puissances pour chacun d'entre eux. Cette méthode ne peut être utilisée que pour un petit nombre de groupes. D'autres méthodes ont été proposées pour la résolution de ces problèmes telles que la méthode des multiplicateurs de Lagrange [5,6,11] qui suppose la convexité de la fonction input-output, la programmation mixte, la méthode duale d'optimisation, l'optimisation classique [4,8], le recuit simulé [12] et la recherche génétique [1,10,13,15]. Ces méthodes ne donnent pas nécessairement un optimum global.

Notons que la demande en électricité P_R peut varier d'une période à l'autre. Dans ce cas, l'ajout de contraintes telles que les périodes minimales et maximales d'arrêt et de fonctionnement devient nécessaire. Les méthodes de résolution du problème dynamique de chargement optimal et de choix des groupes [3,7,9] diffèrent du cas statique (centrale thermique, centrale hydraulique) et dépassent le cadre de cet article.

2 Formulation

Le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale se formule comme suit :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N F_i(P_i)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N P_i &= P_R \\ P_i^{\min} &\leq P_i \leq P_i^{\max} \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

où :

- $F_i(P_i)$: fonction de coût du groupe i (en \$/h);

- N : nombre de groupes;
- P_i : puissance du groupe i (en MW);
- P_i^{min}, P_i^{max} : puissance minimale et maximale du groupe i (en MW);
- P_R : demande en puissance (en MW).

Les groupes du système peuvent soit ne pas être utilisés, soit produire une puissance comprise entre un minimum et un maximum donné. Donc, pour chaque groupe, on aura :

$$P_i = 0 \quad \text{ou} \quad P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max}$$

Le problème de chargement avec choix des groupes se formule comme suit :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N F_i(P_i)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N P_i &= P_R \\ P_i^{min} Y_i &\leq P_i \leq P_i^{max} Y_i \\ Y_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

où :

- Y_i : variable 0-1 correspondant à l'utilisation ou non du groupe i .

Propriété : Le problème de chargement optimal d'une centrale thermique utilisant des groupes avec plusieurs soupapes d'admission de vapeur admet une solution optimale où tous les groupes (sauf un au plus) fonctionnent à une puissance correspondant à un point de cassure de la fonction de coût.

Preuve : Soit (S) une solution où deux groupes j et k fonctionnent à des puissances respectives P_j et P_k qui ne correspondent pas à des points de cassure.

Notons $P = (P_1, \dots, P_j, \dots, P_k, \dots, P_N)$, l'ensemble des puissances de tous les groupes de (S) où :

$$u_i^j \leq P_j \leq u_{i+1}^j$$

et

$$u_i^k \leq P_k \leq u_{i+1}^k$$

u_i^j étant les points de cassure du groupe j .

Comme F_j et F_k sont deux fonctions concaves sur l'intervalle $[u_i^j, u_{i+1}^j]$ et $[u_i^k, u_{i+1}^k]$, la fonction somme $F_j + F_k$ est une fonction concave sur $[u_i^j + u_i^k, u_{i+1}^j + u_{i+1}^k]$. Or le minimum d'une fonction concave sur un polyèdre borné est un point extrême donc :

$$F_j(P_j) + F_k(P_k) \geq \text{Min}_i [F_i(u_i^j) + F_l(P_l)]$$

avec :

$$u_i^j + P_l = P_j + P_k$$

pour

$$\{i, l\} \in \{j, k\},$$

donc une solution avec deux groupes ou plus qui fonctionnent en des points qui ne sont pas des points de cassure ne peut être optimale. ■

En se basant sur cette propriété, on peut donner une nouvelle formulation au problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale où *interviennent les intervalles successifs* $\Delta P_{i1}, \Delta P_{i2}, \dots, \Delta P_{in_i}$ *entre puissances correspondant à des points de cassure, appelés segments, et les accroissements* $\Delta F_{i1}, \Delta F_{i2}, \dots, \Delta F_{in_i}$ *correspondant à des fonctions de coût* F_i :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N F_{i1} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \Delta F_{ij} x_{ij} + \text{Min}_{i \in I} [F_i(P_i^0 + P_m) - F_i(P_i^0)]$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} P_i^{\text{min}} + \sum_{j=1}^{n_i} \Delta P_{ij} x_{ij} &= P_i^0 \\ P_m &= P_R - \sum_{i=1}^N P_i^0 \\ x_{ij} &\leq x_{ij-1} \\ I &= \{i/0 \leq P_m \leq \Delta P_{ij+1}; x_{ij} = 1, x_{ij+1} = 0\} \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \\ i &= 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n_i; \end{aligned} \tag{1}$$

où :

- P_i^0 : puissance du groupe i avant l'affectation de la puissance manquante,
- P_m : puissance manquante (inférieure à au moins un segment non utilisé),
- x_{ij} : variable 0-1 correspondant à l'opération ou non du j^e segment du groupe i ,
- I : ensemble des groupes aptes à produire dans le segment suivant le dernier en opération la puissance manquante,
- F_{i1} : coût correspondant à la puissance minimale du groupe i ,
- ΔF_{ij} : variation du coût du j^e segment du groupe i ,
- ΔP_{ij} : variation de la production du groupe i suite à l'opération du j^e segment du groupe i ,
- N : nombre de groupes,
- n_i : nombre de points de cassure du groupe i .

Remarquons que si les variables x_{ij} ne sont pas fixées, le programme mathématique ci-dessus exprime entièrement le problème à résoudre. Par ailleurs, la relaxation de ces variables nous permettra de trouver rapidement une borne inférieure de la solution optimale en faisant une linéarisation convexe inférieure par morceaux $L_i(P_i)$ de la fonction de coût $F_i(P_i)$ passant par les points de cassure. Cependant, la méthode adoptée pour le calcul de la borne inférieure suppose la convexité de la fonction $L_i(P_i)$ pour tous les groupes. Pour cela, il suffit de déterminer, pour chaque groupe, l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de cassure, c'est-à-dire le plus petit convexe contenant tous ces points. On aura donc pour certains groupes, une linéarisation de la fonction de coût $F_i(P_i)$ passant seulement par quelques points de cassure et non la totalité.

Pour résoudre ce problème, il faut alors considérer les grands segments formés par les points de cassure de l'enveloppe convexe $E_i(P_i)$ ainsi que les petits segments, c'est-à-dire ceux de la linéarisation non convexe $L_i(P_i)$. Il demeure vrai qu'à l'optimum la production des groupes admettant plusieurs soupapes d'admission de vapeur est faite en un point de cassure de $L_i(P_i)$ (mais pas nécessairement de $E_i(P_i)$) pour tous les groupes sauf au plus un. La borne inférieure est calculée de façon à satisfaire au moindre coût la demande en électricité sur la base de la linéarisation convexe de $F_i(P_i)$. La borne inférieure est trouvée en résolvant le problème suivant :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N F_{i1} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \Delta F_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N P_i^{\min} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \Delta P_{ij} x_{ij} &= P_R \\ x_{ij} &\leq x_{ij-1} \\ 0 &\leq x_{ij} \leq 1 \\ &i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n_i. \end{aligned}$$

où :

- x_{ij} : variable correspondant à l'opération, d'une partie ou au complet, ou non du j^e segment du groupe i .

Cette borne inférieure correspond à une solution où, au plus, un seul groupe fonctionne avec une puissance qui n'est pas un point de cassure. Ceci nous permet de trouver rapidement une borne supérieure sur la solution en résolvant le problème (1) où les variables x_{ij} entières sont fixées à leur valeur et la variable fractionnaire mise à zéro. Il suffit alors de trouver le groupe i tel que $[F_i(P_i^0 + P_m) - F_i(P_i^0)]$ prend sa valeur minimale.

Une fois la borne supérieure trouvée, on applique la procédure de séparation pour trouver la solution optimale. Le branchement se fait toujours sur la dernière variable x_{ij} mise à un, c'est-à-dire le j^e segment du groupe i .

Algorithme**1. Initialisation**

Déterminer l'enveloppe convexe $E_i(P_i)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, N$.

Calculer les pentes $\Delta E_{ij}/\Delta P_{ij}$ des différents segments des groupes et les trier dans l'ordre non décroissant.

2. Calcul de la borne inférieure

Considérer les pentes $\Delta E_{ij}/\Delta P_{ij}$ des ségments dans l'ordre non décroissant. La borne inférieure est égale à :

$$\underline{z} = \text{Min} \sum_{i=1}^N F_{i1} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} \Delta F_{ij} X_{ij}$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^N P_i^{\text{min}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} \Delta P_{ij} X_{ij} = P_R$$

$$X_{ij} \leq X_{ij-1}$$

$$0 \leq X_{ij} \leq 1$$

$$i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n_i.$$

3. Calcul de la borne supérieure

Considérer le dernier grand ségment fixé (en partie) ou au complet lors du calcul de la borne inférieure.

Mettre la variable x_{ij} fractionnaire à zéro.

La borne supérieure est égale à :

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^N F_{i1} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \Delta F_{ij} + \text{Min}_{i \in I} [F_i(P_i^0 + P_m) - F_i(P_i^0)]$$

avec :

$$P_i^{\text{min}} + \sum_{j=1}^{n_i} \Delta P_{ij} x_{ij} = P_i^0$$

$$P_m = P_R - \sum_{i=1}^N P_i^0$$

$$I = \{i/0 \leq P_m \leq \Delta P_{ij+1}; X_{ij} = 1, X_{ij+1} = 0\}$$

Poser $z_{\text{opt}} = \bar{z}$; Popt= $[P_1, P_2, \dots, P_N]$, solution correspondante.

4. Séparation

Considérer les segments de $E_i(P_i)$ dans l'ordre inverse de leurs fixations.

Soit x_{kl} l'indice du dernier segment fixé à 1 lors du calcul de la borne inférieure, le mettre à zéro. Poser :

$$P_k = P_k - \Delta P_{kl}$$

$$P_M = P_M + \Delta P_{kl}.$$

- (a) Test d'admissibilité
Si

$$P_k + \sum_{i=1, i \neq k}^N P_i^{max} \leq P_R$$

alors fin; aller en (e).

- (b) Mise à jour

Mettre à jour les puissances des groupes après branchement.

Si $(x_{ij} = 1)$ et $(\Delta F_{ij}/\Delta P_{ij} \geq \Delta F_{kl}/\Delta P_{kl})$ alors :

Soit $k(j)$ l'indice du grand segment contenant le petit segment $(x_{ij} = 1)$:

$$X_{ik(j)} = 0$$

$$P_i = P_i + \Delta P_{ij}$$

$$P_M = P_M + \Delta P_{ij}.$$

- (c) Calcul des nouvelles bornes

Considérer les pentes triées à partir de $\Delta F_{kl}/\Delta P_{kl}$; passer à la suivante.

Calculer la borne inférieure \underline{z} .

Si $\underline{z} > z_{opt}$ alors aller en (e).

Sinon calculer une borne supérieure \bar{z} .

- (d) Test d'optimalité

Si $\bar{z} > z_{opt}$, alors aller en 4).

Sinon $\bar{z} = z_{opt}$; $P_{opt} = [P_1, \dots, P_N]$ solution correspondante; aller en 4).

- (e) Test de fin

Si $\Delta F_{kl}/\Delta P_{kl} = \text{Min}_{i,j} \Delta F_{ij}/\Delta P_{ij}$ alors fin.

Sinon retour arrière. Aller en 4).

L'algorithme d'énumération implicite énumère seulement les solutions admettant un seul groupe au plus qui fonctionne en dehors d'un point de cassure. En considérant tout d'abord les pentes des segments de l'enveloppe convexe dans l'ordre non décroissant, l'algorithme calcule la plus petite borne inférieure de la solution optimale satisfaisant la demande en électricité sur la base de la linéarisation convexe des fonctions de coûts ainsi que la meilleure solution formée par ces points. Ensuite, à l'aide d'un branchement sur le dernier segment pris lors du calcul des bornes, l'algorithme explore à chaque fois la meilleure solution formée par ces nouveaux points.

Le branchement dans l'ordre inverse de fixation des segments permet un accroissement de la borne inférieure, et donc une possibilité de faire des retours arrière. En effet, si la

borne inférieure trouvée est supérieure à la meilleure solution connue, la solution ne peut être améliorée par ces points. Sinon, on explore cette branche dans le but d'améliorer la meilleure solution connue. On conclut donc que toute solution admettant un seul groupe au plus qui fonctionne en dehors d'un point de cassure est soit explorée par l'algorithme, soit dominée. On peut anticiper le rejet de la nouvelle solution en faisant un calcul partiel ou, en d'autres termes, un calcul des pénalités, c'est-à-dire l'accroissement minimal de la solution suite à la fixation d'une variable à zéro.

Les pénalités dues à la fixation d'une variable à 0 sont :

$$\sum_{x_{ij}} \left(-\frac{\Delta F_{ij}}{\Delta P_{ij}} + \frac{\Delta F_m}{\Delta P_m} \right) \Delta P_{ij} \text{ pour } x_{ij} = 1 \text{ et } x_{ik} = 0, j > k.$$

En présence de classes de groupes identiques, ce qui est souvent le cas, la procédure de séparation va retrouver plusieurs fois la même solution. L'ajout d'un ensemble de contraintes au problème devient nécessaire pour éviter un accroissement inutile du temps de calcul dû à la symétrie de la solution.

Ces contraintes sont :

$$x_{i_1 j} \geq x_{i_2 j}; \quad \forall j \text{ pour } i_1 < i_2 \quad i_1, i_2 \in I_k;$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \{1, \dots, t_1\} \\ I_2 &= \{t_1 + 1, \dots, t_1 + t_2\} \\ &\vdots \\ I_m &= \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} t_k + 1, \dots, \sum_{k=1}^m t_k = N \right\} \end{aligned}$$

où I_1, I_2, \dots, I_m sont les ensembles d'indices de chaque classe de groupes identiques et t_1, t_2, \dots, t_m les effectifs de ces classes.

Exemple : Considérons un exemple à quatre groupes construit à partir des données de Bakirtzis et al. [1]. Les tables 1, 2, 3 et 4 présentent les différents points de cassure de chaque groupe ainsi que les valeurs des pentes formées par ces points.

Les tables 5, 6, 7 et 8 présentent les différents points de cassure qui forment l'enveloppe convexe de chaque groupe.

La table 9 présente les pentes triées de l'ensemble des enveloppes convexes des différents groupes.

Table 1: Points de cassure du groupe 1

Point i	1	2	3	4	5	6	7
$P_i(MW)$	70	85	125	145	170	190	220
$F(P_i)(\$/h)$	1600	1915	2655	2995	3570	3960	4545
Pente	-	21	18.5	17	230	19.5	19.5

Table 2: Points de cassure du groupe 2

Point i	1	2	3	4
$P_i(MW)$	210	360	480	570
$F(P_i)(\$/h)$	4300	7037.5	8777.5	10555
Pente	-	18.25	14.5	19.75

Table 3: Points de cassure du groupe 3

Point i	1	2	3	4
$P_i(MW)$	170	210	280	360
$F(P_i)(\$/h)$	3200	4020	5406	7186
Pente	-	20.05	19.8	22.25

Table 4: Points de cassure du groupe 4

Point i	1	2	3	4
$P_i(MW)$	50	170	520	640
$F(P_i)(\$/h)$	2000	3860	22635	26985
Pente	-	39	38.5	36.25

Table 5: Enveloppe convexe du groupe 1

Point i	1	2	3
$P_i(MW)$	70	145	220
$F(P_i)(\$/h)$	1600	2995	4545
Pente	-	18.6	20.66

Table 6: Enveloppe convexe du groupe 2

Point i	1	2	3
$P_i(MW)$	210	480	570
$F(P_i)(\$/h)$	4300	8777.5	10555
Pente	-	16.58	19.75

Table 7: Enveloppe convexe du groupe 3

Point i	1	2	3
$P_i(MW)$	170	280	360
$F(P_i)(\$/h)$	3200	5406	7186
Pente	-	20.05	22.25

Table 8: Enveloppe convexe du groupe 4

Point i	1	2
$P_i(MW)$	130	640
$F(P_i)(\$/h)$	7500	26985
Pente	-	38.2

Table 9: Pentés triées

Pente i	1	2	3	4	5	6	7
	16.58	18.6	19.75	20.05	20.66	22.25	38.2

La demande en puissance P_R étant égale à 1100 MW.

- Calcul d'une borne inférieure :

Considérer les pentes dans l'ordre non décroissant :

BorneInf = 25954.25 \$/h, pour : $P_1 = 145$ MW, $P_2 = 570$ MW, $P_3 = 255$ MW, $P_4 = 130$ MW; La production manquante P_M égale à 85 MW.

- Calcul d'une borne supérieure :

Création d'ensemble de groupe apte à recevoir la production manquante :

$I = \{3,4\}$

BorneSup = 26048.75 \$/h = SolOpt, avec : $P_1 = 145$ MW, $P_2 = 570$ MW, $P_3 = 255$ MW, $P_4 = 130$ MW;

- Procédure de séparation :

Brancher sur le dernier segment (petit) fixé à un : $P_3 = 255 - 45 = 210$ MW; $P_M = 45$ MW; BorneInf = 25999.7 \$/h inférieure à SolOpt, pour : $P_1 = 190$ MW, $P_2 = 570$ MW, $P_3 = 210$ MW, $P_4 = 130$ MW; $I = \{1,4\}$ BorneSup = 26035 \$/h inférieure à SolOpt, donc :

SolOpt = 26035 \$/h, pour : $P_1^* = 190$ MW, $P_2^* = 570$ MW, $P_3^* = 210$ MW, $P_4^* = 130$ MW;

Brancher sur le dernier segment (petit) fixé à un : $P_1 = 170$ MW, $P_M = 20$ MW; BorneInf = 26041 \$/h supérieure à SolOpt, donc retour arrière (grand).

La méthode d'énumération implicite pour la résolution du problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale peut être étendue au problème de choix des groupes où on admet un ou plusieurs groupes à l'arrêt. Pour cela, le point $P_i = 0$ doit être considéré comme point de cassure et la linéarisation par morceaux de la fonction de coût $L_i(P_i)$ devra passer par ce point. Celle-ci sera d'ordinaire non convexe étant donnée l'importance de l'accroissement des coûts à l'ouverture de la première soupape d'admission de vapeur (figure 2). Pour pouvoir appliquer l'algorithme précédent, on détermine l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de cassure, c'est-à-dire le plus petit convexe contenant tous ces points. Le problème se formule comme suit :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \Delta F_{ij} x_{ij} + \text{Min}_{i \in I} [F_i(P_i^0 + P_m) - F_i(P_i^0)]$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n_i} \Delta P_{ij} x_{ij} = P_i^0$$

$$P_m = P_R - \sum_{i=1}^N P_i^0$$

$$x_{ij} \leq x_{ij-1}$$

$$I = \{i/0 \leq P_m \leq \Delta P_{ij+1}; X_{ij} = 1, X_{ij+1} = 0\}$$

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &\in \{0, 1\} \\
 X_{ij} &\in \{0, 1\} \\
 i &= 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n_i;
 \end{aligned}$$

où :

- x_{ij} : variable 0-1 correspondant à l'opération ou non du j^e segment du groupe i ;
- I : ensemble des groupes aptes à produire, dans le segment suivant le dernier en opération, la puissance manquante;
- n_i : nombre de points de cassure du groupe i ;
- N_i : nombre de points de cassure de l'enveloppe convexe $E_i(P_i)$.

On applique donc le même algorithme que pour le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale où la linéarisation de la fonction de coût passant par tous les points de cassure est non convexe. Rappelons que le coût pour l'intervalle $]0, P_i^{\min}[$ est fixé à une valeur M arbitrairement grande.

Pour le problème de choix des groupes, le nombre d'itérations de la procédure de séparation sera plus élevé que pour le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale à cause de l'écart, plus élevé, entre la borne inférieure et supérieure.

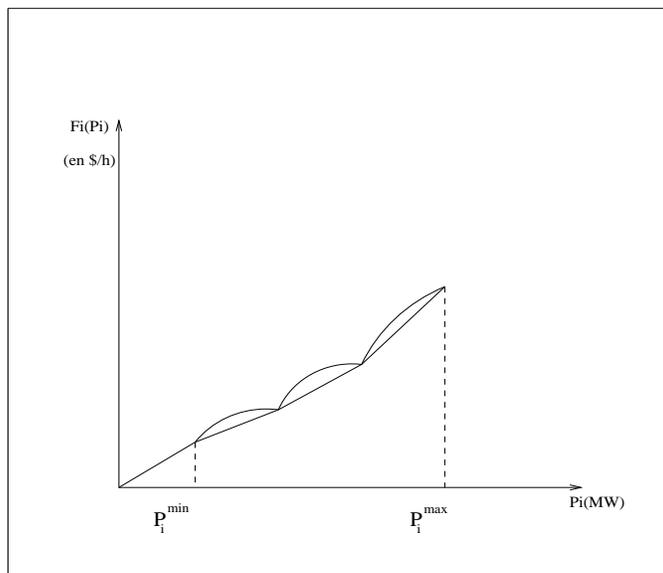


Figure 2: Linéarisation par morceaux non convexe de la fonction de coût

3 Résultats

Afin d'évaluer la performance de la méthode d'énumération implicite pour les problèmes de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale et avec choix des groupes, l'algorithme a été programmé en langage C et testé sur un ordinateur SUN ULTRA 2 (300MHZ). Cet algorithme a été testé sur plusieurs exemples dont un, construit à partir des données de Bakirtzis et al. [1] sur 9 unités, présenté dans la table 10.

Dans la table 11, on présente les résultats obtenus pour le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale et une demande en électricité de 2500 MW. La solution trouvée coûte 57291.96 \$/h et coïncide avec les résultats des méthodes de programmation dynamique [5] et de recherche génétique [1]. Notons que ce dernier algorithme ne trouve pas nécessairement la solution optimale pour un grand nombre de groupes.

La table 12 présente la solution optimale du problème de choix des groupes pour le même exemple, trouvée par la méthode d'énumération implicite. Cette solution coïncide aussi avec celle obtenue par programmation dynamique. On remarque que le coût de la solution est inférieur à celui du problème de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale et que la puissance requise est générée par seulement 5 groupes.

Les problèmes de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale et choix des groupes ont aussi été résolus pour des exemples avec 18, 36 et 72 groupes. Ces exemples ont été construits à partir des données de [1] sur 9 groupes présentés à la table 10. Ils consistent à doubler successivement le nombre de groupes ainsi que la quantité demandée en électricité en commençant par 2500 MW. Les tables 13 et 14 présentent les coûts des solutions optimales de ces exemples, les temps de calcul ainsi que le nombre de solutions générées par la méthode d'énumération implicite pour les deux problèmes.

La solution optimale pour le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale est obtenue par la méthode d'énumération implicite en 4.75 secondes pour un exemple de 72 groupes. Ces temps de calcul sont nettement inférieurs à ceux cités dans la littérature. Pour le même exemple, Hansen et Mladenović [5] donnent un temps de calcul de 69.5 secondes par la méthode de programmation dynamique contre 642 secondes par l'algorithme génétique. Rappelons que cette dernière méthode ne donne pas nécessairement la solution optimale et se contente, dans la plupart des cas, d'un optimum local. C'est en effet le cas pour la résolution des exemples de 36 et 72 groupes par Bakirtzis, Petridis et Kazarlis (1994). La table 15 donne une comparaison des temps de calcul ainsi que les pourcentages d'efficacité entre les trois méthodes pour le problème de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale.

On remarque donc que la méthode d'énumération implicite est beaucoup plus rapide que la méthode de programmation dynamique pour la résolution de ce problème. La différence des temps de calcul semble être due à plusieurs facteurs :

Table 10: Exemple de 9 groupes

Groupe i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P^{max}(MW)$	560	185	220	570	360	640	640	600	600
$P^{min}(MW)$	50	50	70	210	170	130	130	190	190
$F(P^{min})(\$/h)$	2000	1400	1600	4300	3200	7500	7500	4000	3900
$F(P^{max})(\$/h)$	10690	5045	5005	11035	7186	26985	26205	10927.5	10537.5
Nombre de points	5	7	7	4	4	4	4	4	4

Table 11: Solution optimale pour un chargement de 9 groupes

Groupe i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	total
$P_i(MW)$	460	50	145	215	170	130	130	600	600	2500
$F_i(\$/h)$	8765	1400	3055	4407	3200	7500	7500	10927.5	10537.5	57291.96

Table 12: Solution optimale pour un chargement de 9 groupes avec choix des groupes

Groupe i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	total
$P_i(MW)$	560	0	0	570	170	0	0	600	600	2500
$F_i(\$/h)$	10690	0	0	11035	3200	0	0	10927.5	10537.5	46390

Table 13: Performance de la procédure d'optimisation par séparation pour le problème de production optimale

Nombre de groupes	Solution optimale	Temps CPU	Nombre de noeuds
9	57291.96	0.01	12
18	114410.00	0.02	27
36	228815.00	0.06	116
72	457575.00	4.75	3842

Table 14: Performance de la procédure d'optimisation par séparation pour le problème de production optimale avec choix des groupes

Nombre de groupes	Solution optimale	Temps CPU	Nombre de noeuds
9	46390.00	0.01	19
18	92780.00	0.01	37
36	185560.00	0.02	73
72	371119.00	0.09	144

- La différence de vitesse des ordinateurs utilisés pour la résolution (300 MHz contre 50 MHz pour la programmation dynamique).
- La technique de programmation dynamique avec un pas de discrétisation de 1MW énumère plus de solutions entières que la méthode d'énumération implicite. Cette dernière se basant sur la propriété 1 démontrée plus haut, n'énumère que les solutions admettant un seul groupe au plus qui ne fonctionne pas en un point de cassure et élimine un grand nombre d'entre elles à travers la procédure d'optimisation par séparation. On remarque que pour l'exemple de 72 groupes, on a généré 3824 solutions ce qui est très peu par rapport au nombre total de solutions admissibles, ou de solutions entières calculées par l'algorithme de programmation dynamique.

Notons que le nombre de noeuds peut être réduit considérablement puisque l'exemple de 72 groupes peut être considéré comme étant un ensemble de 9 classes comprenant chacune 8 groupes identiques. L'ajout d'un ensemble de contraintes exprimant qu'un seul branchement doit être considéré dans une classe de groupes pour un même segment, va permettre d'éviter un accroissement inutile des temps de calcul, dû à la symétrie de la solution.

La table 16 donne, pour les mêmes exemples, une comparaison des temps de calcul entre la méthode d'énumération implicite et la programmation dynamique, donnés par Hansen et Mladenović [5] pour le problème de chargement optimal avec choix des groupes.

Pour ce problème, la solution optimale pour l'exemple de 72 groupes est obtenue en 0.09 secondes. Seulement 40 groupes ont une production positive avec un coût total de 371119 \$/h. Le coût est réduit de 86465 \$/h par rapport au coût encouru lorsque tous les groupes fonctionnent.

On remarque que pour la méthode de programmation dynamique, les temps de calcul pour le problème de choix des groupes sont nettement plus élevés que ceux trouvés pour le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale. Ceci est dû à l'augmentation de l'étendue des puissances possibles de 0 à P_i^{max} car le temps de calcul de la programmation dynamique est de l'ordre du carré de l'étendue des puissances des groupes. Ceci n'est pas souvent le cas pour la méthode d'énumération

Table 15: Comparaison de performance pour trois approches du problème de production optimale

Nombre de groupes	Énumération implicite		Programmation dynamique		Algorithme génétique	
	temps CPU	succès	temps CPU	succès	temps CPU	succès
	s	%	s	%	s	%
9	0.01	100	0.95	100	16	100
18	0.02	100	4.26	100	94	100
36	0.06	100	17.90	100	202	70
72	4.75	100	69.50	100	642	40

Table 16: Comparaison de performance de deux approches du problème de production optimale et choix des groupes

Nombre de groupes	Énumération implicite		Programmation dynamique	
	temps CPU	succès	temps CPU	succès
	s	%	s	%
9	0.01	100	1.48	100
18	0.01	100	6.87	100
36	0.02	100	28.91	100
72	0.09	100	118.3	100

implicite puisqu'en considérant les exemples précédents, on remarque que la résolution des problèmes de choix des groupes se fait en moins de temps que celui du problème de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale. En effet, l'élaboration d'une enveloppe convexe inférieure laisse croire que le nombre d'itérations de la procédure de séparation va augmenter considérablement, ce qui induit une augmentation des temps de calcul pour le problème de choix des groupes. Ceci est dû à la différence plus élevée entre la borne supérieure et inférieure. La différence des temps de calcul semble être due à plusieurs facteurs :

- Le calcul des bornes inférieures et supérieures se fait plus rapidement pour le problème de choix des groupes que pour le problème de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale. En effet, la prise en compte du point (0,0) comme point de cassure va permettre à l'enveloppe convexe inférieure d'avoir moins de points de cassure que celle du problème de chargement avec contraintes de puissance maximale et minimale. Ceci est dû à l'importance de l'accroissement des coûts à l'ouverture de la première soupape d'admission de vapeur. Cela est illustré dans les tables 13 et 14 puisque, pour les exemples de 9 et 18 groupes, la méthode d'énumération implicite résout le problème de choix des groupes en explorant plus de solutions (respectivement 19 et 37 noeuds) que pour le problème de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale (respectivement 12 et 27 noeuds).
- Les données des exemples testés influencent les temps de calcul de notre algorithme. En effet, la méthode d'énumération implicite se basant sur le fait qu'à l'optimum tous les groupes fonctionnent en un point de cassure sauf au plus un, on commence par trouver une solution par le biais du tri des pentes des segments de l'enveloppe convexe. Si les pentes des premiers segments de certains groupes sont grandes, la procédure de séparation va générer moins de solutions puisqu'on ne peut tenir compte de ces groupes à cause de la borne inférieure qui sera, dans la plupart des cas, supérieure à la meilleure solution déjà connue. Par exemple, la solution optimale pour 72 groupes a été trouvée en générant seulement 144 solutions, ceci du fait que 32 groupes sont à l'arrêt.

Pour tester la performance de l'algorithme pour le problème de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale dans le cas où la linéarisation des fonctions

de coût passant par tous les points de cassure est convexe, on a construit plusieurs exemples à partir de 4 groupes des données de [1] qui vérifient la convexité de la linéarisation. La table 17 présente les temps de calcul de différents exemples.

La création de classes de groupes et l'ajout d'un ensemble de contraintes, permettant un seul branchement sur un même segment d'une classe, accélèrent considérablement les temps de calcul. La table 18 montre les temps de calcul ainsi que le nombre de solutions générées pour ce problème.

On remarque que le temps de calcul pour un exemple de 60 groupes est de 3.71 secondes, ce qui est assez rapide. La formation de 12 classes pour le même exemple avec une même demande en électricité a permis une réduction de 98.38 % du temps de calcul. Cela est dû à la diminution du nombre de solutions générées qui passe de 6554 à 42. En effet, la création de classes de groupes permet une réduction importante du nombre de solutions puisque chaque branchement non effectué entraîne dans la plupart des cas une réduction de plusieurs solutions à explorer.

On conclut donc que des contraintes supplémentaires deviennent nécessaires pour une résolution plus rapide des problèmes de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale et aussi celui de choix des groupes. Les temps de calcul pour le problème de choix des groupes peuvent être accélérés en faisant un calcul partiel au lieu d'un calcul complet de la borne inférieure. Le nombre de solutions générées par la procédure de séparation va diminuer puisque l'on calcule seulement l'accroissement minimal de la borne inférieure suite à un branchement. On peut aussi former des classes de groupes et accélérer

Table 17: Temps de calcul dans le cas de linéarisation non convexe des fonctions de coût

Nombre de groupes	Temps CPU	Nombre de noeuds
4	0.00	4
8	0.01	7
24	0.21	559
36	0.43	740
48	1.48	2040
60	3.71	6554

Table 18: Temps de calcul de l'algorithme avec formation de classes

Nombre de groupes	Nombre de classes	Temps CPU	Nombre de noeuds
8	2	0.00	6
12	3	0.00	7
16	4	0.01	9
24	6	0.02	15
32	8	0.03	20
60	12	0.06	42

les temps de calcul comme dans le cas du problème de chargement avec contraintes de puissance minimale et maximale.

4 Conclusion

Nous avons étudié le problème de gestion optimale de la production de groupes turbo-alternateurs d'une centrale thermique sur une période donnée. Sous l'hypothèse que les fonctions de coût des groupes sont concaves par morceaux, ce problème est formulé sous forme d'une minimisation d'une somme de fonctions concaves par morceaux sous des contraintes linéaires.

Nous avons démontré que, pour ce problème, dans toute solution optimale, la production est faite en un point de cassure pour tous les groupes sauf un au plus. Cette propriété est exploitée pour donner une nouvelle formulation aux problèmes de chargement optimal des groupes avec contraintes de puissance minimale et maximale ou avec choix des groupes. Cette formulation est basée sur les pentes des segments formés par les points de cassure des fonctions de coût des différents groupes. Ceci nous a permis d'obtenir une procédure d'optimisation par séparation très efficace pour la résolution exacte de ces problèmes.

Cette méthode s'est avérée plus efficace que la programmation dynamique avec une variable d'état qui constitue une des principales approches de résolution de ces problèmes. Ceci, d'une part, en raison de la légère approximation de la programmation dynamique due à la discrétisation de la puissance de chaque groupe et de la contribution en puissance de chaque ensemble de groupe et, d'autre part, à cause des temps de calcul nettement plus élevés que ceux de la méthode d'énumération implicite proposée.

De plus, la croissance du temps de calcul de cette méthode en fonction du nombre de groupes est modérée. En effet, le regroupement de groupes identiques dans une même classe et l'imposition d'une règle de précedence pour le fonctionnement de ces groupes évite l'énumération de nombreuses solutions identiques pour les problèmes de chargement optimal avec contraintes de puissance minimale et maximale et de choix des groupes.

Bibliographie

- [1] Bakirtzis, A., Petridis, V., Kazarlis, S., Genetic Algorithm Solution to the Economic Dispatch Problem, *IEE Proceedings-Generation Transmission and Distribution*, 141(IV), 1994, 377-382.
- [2] Bellman, R.E, Dreyfus, S.E., *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1962.
- [3] Chowdury, B.H., Rahman, S., A Review of Recent Advances in Economic Dispatch, *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(V), 1990, 1284-1257
- [4] Gauvin, J., Parent, P., Savard, G., Répartition optimale de la puissance dans une centrale hydraulique à reserve pompée, *R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle*, 20(1), 1986, 1-18.
- [5] Hansen, P., Mladenović, N., Simultaneous Static Unit Commitment and Economic Dispatch by Dynamic Programming, *Les Cahiers du GERAD G-96-26*, 1996.

- [6] Happ, H., Optimal Power Dispatch – A Comprehensive Survey, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 93, 1974, 820–830.
- [7] Kirchmayer, L.L., Stagg, G.W., Evaluation of Methods of Coordinating Internal Fuel and Incremental Transmission Losses, *AIEE Transactions*, 71(III), 1952, 513–520.
- [8] Lowery, P.G., Generation Unit Commitment by Dynamic Programming, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, (5), 1996.
- [9] Sheblé, G.B., Real-Time Economic Dispatch and Reserve Allocation Using Merit Order Loading and Linear Programming Rules, *IEEE Transactions on Power Systems*, 4(IV), 1989, 1414–1420.
- [10] Sheblé, G.B., Brittig, K., Refined Genetic Algorithm – Economic Dispatch Example, *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(I), 1995, 117–123.
- [11] Ward, J.B., Economy Loading Simplified, *AIEE Transactions*, 71(III), 1953, 1306–1311.
- [12] Wong, K.P., Liang, L.G., Simulated Annealing Based Economic Dispatch Algorithm, *IEE Proceedings–Generation Transmission and Distribution*, 140(VI), 1993, 509–515.
- [13] Wong, K.P., Wong, Y.W., Genetic and Genetic/Simulated Annealing Approaches to Economic Dispatch, *IEE Proceedings–Generation Transmission and Distribution*, 141(V), 1994, 507–513.
- [14] Wood, A.J., Wollenberg, B.F., *Power Generation, Operation and Control*, Wiley, New-York, 1984, 2nd revised edition, 1996.
- [15] Wright, J.G., Bose, A., Sheblé, G.B., Generation Dispatch with Reserve Margin Constraints Using Linear Programming, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 100(I), 1981, 252–258.