

**Cohérence dynamique dans les  
jeux différentiels**

Georges Zaccour

G-2004-40

Mai 2004

Allocution à la Société Royale du Canada

Les textes publiés dans la série des rapports de recherche HEC n'engagent que la responsabilité de leurs auteurs. La publication de ces rapports de recherche bénéficie d'une subvention du Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies.

# Cohérence dynamique dans les jeux différentiels

**Georges Zaccour**

*Service de l'enseignement du marketing*

*HEC Montréal*

*et GERAD*

georges.zaccour@hec.ca

Mai 2004

*Les Cahiers du GERAD*

G-2004-40

Copyright © 2004 GERAD

### **Résumé**

Le texte qui suit est l'allocution donnée par le professeur Georges Zaccour à la Société Royale du Canada, le vendredi 23 avril 2004, à HEC Montréal.

### **Abstract**

The following is the speech given by Professor Georges Zaccour at the Royal Society of Canada, held on Friday, April 23, 2004 at HEC Montréal.

**Cher Pierre (Hansen),  
Chers collègues de la Société Royale,  
Chers amis,  
Mesdames et Messieurs,**

Je voudrais faire avec vous ce soir un bref tour d'horizon d'un problème qui, comme bien des beaux problèmes, s'énonce avec une grande simplicité mais est pourtant très difficile à résoudre. Considérons une association d'un certain nombre d'acteurs qui ratifient une entente de coopération portant sur plusieurs périodes. Est-ce que ces partenaires vont effectivement tenir leurs engagements à mesure que le temps passe ? Sous l'hypothèse de libre arbitre, la réponse à cette question est évidente : les partenaires vont continuer à honorer leurs engagements s'il y va ainsi de leurs intérêts personnels. Voilà grosso modo le champ de la rationalité individuelle dynamique dans les jeux différentiels. Une contribution à ce champ prend typiquement la forme d'un mécanisme transparent qui pourrait être mis en place afin de s'assurer qu'aucun joueur ne soit, à aucun moment, tenté de tricher ou de dévier du plan d'action établi conjointement au moment de l'entente.

J'ai croisé ce problème dans des contextes aussi divers que le design de contrats dans le marché européen de gaz naturel, la coordination des stratégies marketing dans les réseaux de distribution et l'établissement de quotas d'émissions de dioxyde de carbone dans le cadre de traités internationaux. Ces problèmes, pratiques à l'origine, posent des défis conceptuels et algorithmiques qui font qu'ils méritent qu'on s'y attarde.

La question de la cohérence dynamique d'un plan d'action se pose dans tout contexte où une décision, prise aujourd'hui, a des impacts sur des résultats futurs. Sa caractérisation est simple quand il s'agit d'un problème qui implique un seul preneur de décision, même dans un cadre incertain. Les exemples précédemment mentionnés ont cependant la particularité de mettre en scène plusieurs entités qui sont souveraines en terme de prise de décision mais interdépendantes vis-à-vis de l'enjeu. Cette interdépendance entre les acteurs dans le processus de détermination d'une solution fait naturellement intervenir des concepts de négociation, de conflit et de coopération, qui sont au cœur de la théorie des jeux.

## Coopération, conflit et théorie des jeux

La résolution de conflits par la négociation est un art que l'humanité pratique depuis fort longtemps, probablement depuis qu'elle maîtrise la parole. Il s'agit d'un phénomène si présent dans toutes les sphères de l'activité humaine qu'il fascine plusieurs disciplines des sciences sociales. La sociologie, la psychologie, l'économie, les sciences juridiques et politiques proposent différentes approches pour tenter de comprendre les comportements d'agents impliqués dans une négociation et d'en prévoir l'issue. La théorie des jeux, qui est une formalisation mathématique de problèmes de décision à plusieurs agents, fournit les éléments d'une approche rigoureuse pour l'élaboration de paradigmes servant à analyser les résultats envisageables lors de confrontations entre agents ayant des intérêts qui ne coïncident pas nécessairement.

Quand cette confrontation est récurrente ou que l'enjeu porte sur une échéance future, par exemple le Protocole de Kyoto porte sur les émissions de polluants à l'horizon 2008-2012, l'analyse doit épouser une forme dynamique. La théorie des jeux différentiels, qui est le prolongement de la théorie de la commande optimale au cas où le système est contrôlé par plus d'un acteur, offre un cadre méthodologique permettant précisément de traiter des problèmes dynamiques de conflit et de coopération entre des agents dont les gains sont interdépendants. Dans le cas général, le gain d'un joueur dépend de sa stratégie, des stratégies des autres joueurs, du temps et de l'état du système. Ce dernier pourrait être la position à un instant donné d'un chasseur bombardier, le capital de marque d'un produit ou le niveau des connaissances dans une économie. Des équations différentielles, d'où le nom de cette théorie, décrivent comment l'état actuel du système dépend du passé ainsi que des décisions prises par les joueurs. Chaque joueur vise à optimiser la valeur d'un critère de performance sur un horizon temporel fini ou infini.

L'origine de la théorie des jeux différentiels est attribuée à Rufus Isaacs qui en a posé les bases dans une série d'articles publiés par la RAND Corporation dans les années 1950. Pour des raisons diverses, notamment des questions de classification, le traitement complet n'est paru qu'en 1965. À l'instar des jeux dits de poursuite - évasion de Isaacs où les joueurs sont un missile et un bombardier, les premières applications de cette théorie ont surtout été au domaine militaire. Depuis, les champs d'application se sont multipliés : un survol rapide des programmes des Symposiums de la International Society of Dynamic Games des quinze dernières années montre la diversité d'application de cette théorie dans de très nombreux domaines, par exemple en biologie, en économie, en sciences de la gestion, etc., et la richesse de ses possibilités (dans un livre récent sur les jeux différentiels en marketing, mon collègue Steffen Jorgensen et moi-même avons recensé plus de deux cents articles sur le sujet publiés dans des revues savantes).

La confection d'une entente peut être traitée, dépendamment de ses caractéristiques intrinsèques, comme l'issue d'un jeu coopératif ou la solution d'un jeu non coopératif. La théorie des jeux non coopératifs suppose que les acteurs ont des intérêts antagonistes et ne communiquent pas entre eux. D'ailleurs, même si la communication était permise, elle ne changerait en rien le résultat dans la mesure où les joueurs ne se font pas confiance mutuellement. Ainsi, une promesse par un joueur d'implanter une stratégie donnée n'est crédible aux yeux des autres que s'il y va de son intérêt de le faire, et une stratégie non crédible n'a aucune chance de figurer dans l'accord final. Quel est donc le vecteur de stratégies qui émergera comme solution ?

Dans un problème de décision à un seul agent, la notion de ce qu'est la meilleure issue est définie sans ambiguïté et ceci même quand les données sont entachées d'aléa et le gain rattaché à chaque action possible est incertain, sous l'hypothèse raisonnable que l'agent choisira la stratégie lui assurant la meilleure conséquence, quelle que soit la façon dont il range ces conséquences. Dans un jeu, le gain qu'un joueur peut réaliser n'est pas sous sa seule juridiction ; il dépend aussi des choix stratégiques des autres joueurs. En conséquence, la solution optimale pour un individu est contingente à ce que les autres font. Cette idée de contingence est à la base de la notion d'équilibre proposé par John Nash dans sa thèse de doctorat en mathématiques à Princeton à 21 ans et pour laquelle il a eu le prix Nobel d'économie en 1994.

Un équilibre de Nash est une issue du jeu de laquelle aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement. Sous l'hypothèse d'absence de communication, l'équilibre pourrait être rationalisé comme étant le point de convergence d'une série d'offres et de contre offres effectuées par chaque joueur qui analyse le problème tour à tour de son point de vue et de celui de son ou ses opposant(s). La solution d'équilibre, comme on pourrait s'y attendre, dépendra des forces stratégiques des joueurs et d'autres caractéristiques reliées au contexte institutionnel.

Une solution non coopérative à un problème de négociation possède deux caractéristiques fondamentales. La première est que, généralement, elle ne correspond pas à un résultat qui soit collectivement optimal. La différence entre l'équilibre non coopératif et une solution parétienne se mesure par des années en plus en prison pour les joueurs dans le célèbre dilemme des prisonniers, par des tonnes de poissons qui auraient dû rester en mer pour assurer un développement durable de la population marine dans un jeu de pêcheries ou par un manque à gagner pour les partenaires dans un réseau de distribution. La deuxième caractéristique est que chaque individu est assuré d'obtenir son gain d'équilibre. Dans ce sens, l'équilibre est un attracteur psychologiquement rassurant. De plus, l'accord obtenu n'a pas besoin d'être accompagné par un contrat d'exécution : il est auto exécutant parce qu'il y va de l'intérêt de chacun de le respecter. Cet argument, sur lequel je reviendrai plus

loin, fournit une piste intéressante pour la recherche de mécanismes induisant la rationalité individuelle dynamique.

Dans son volet coopératif, la théorie des jeux part de la prémisse qu'il n'existe a priori aucun obstacle sociologique, psychologique, juridique ou économique à ce que les joueurs coordonnent leurs stratégies en vue d'atteindre un objectif commun. Pour déterminer les gains individuels, l'approche méthodologique de la théorie des jeux coopératifs consiste à décomposer le problème en deux étapes. À la première, les joueurs s'entendent sur un objectif commun et déterminent la solution qui est collectivement optimale. À la seconde, ils procèdent à la répartition entre eux de cette richesse collective.

Bien qu'on suppose généralement que le choix de l'objectif commun est une tâche simple qui consiste à optimiser la somme, pondérée ou non, des objectifs individuels des joueurs, il est clair que le choix du critère de performance collectif pourrait faire l'objet d'une négociation, aussi longue et complexe que celle qui suivra pour partager le butin. Je ferai abstraction ici de cette difficulté pour me concentrer sur les propriétés désirables que devrait avoir un accord coopératif visant la répartition du gain collectif. Les propriétés qui sont le plus souvent évoquées sont la rationalité individuelle, statique ou dynamique dépendamment du jeu, l'équité, ou une autre considération morale du même type, et la stabilité.

### **Équité et stabilité**

Commençons par l'équité. Bien que le concept soit indéniablement noble, il pose en partant un défi de taille qui est dû à l'absence d'une définition univoque. Cette ambiguïté a deux implications : la première est que, dans une négociation, le choix de la définition de l'équité est lui-même sujet à négociation. La deuxième est qu'il est toujours possible de réfuter une entente en argumentant qu'elle n'est pas équitable ; pour ce faire, il suffit d'adopter une autre définition de l'équité.

Aristote a énoncé le principe de l'équité verticale en disant que nul dans le royaume ne devrait être plus que trois fois plus riche que le plus démuné. Les chartes de droits, nationales et internationales, adhèrent plutôt au principe de l'équité horizontale d'un individu, un vote. D'autres opérationnalisations ont été avancées telles que la justice de marché, la souveraineté, l'optimalité de Pareto, le consensus, le principe de Rawls, etc. Adam Rose a fait l'exercice d'attribuer la réduction totale d'émissions de correspondant à un optimum collectif selon ces différentes définitions de l'équité et a trouvé, sans grande surprise, que les quotas par pays qui en découlent variaient considérablement.

La théorie des jeux définit l'équité en se référant aux forces stratégiques relatives des joueurs, ou à leurs contributions au butin collectif. Ainsi, plus la contribution d'un joueur

est grande à la richesse collective, plus sa part devrait être grande. Je voudrais faire deux remarques sur l'équité au sens ludique. La première est que cette définition n'est ni meilleure ni pire que les autres sur le plan moral. Son intérêt est qu'elle est déduite des données factuelles du jeu. La deuxième remarque est qu'il n'est nullement interdit par les règles d'un jeu coopératif d'être altruiste, généreux ou désintéressé. En fait, l'équité ne fait pas partie des traits de caractère qu'un joueur doit posséder pour participer à un jeu. Elle est un critère de sélection d'une solution, seulement si les joueurs en décident ainsi.

Considérons maintenant la question de stabilité, une propriété qui occupe une place importante dans toutes les solutions d'un jeu coopératif. Un premier élément de la stabilité est la rationalité individuelle qui stipule qu'aucun joueur n'acceptera un partage qui détériore son sort par rapport à ce qu'il pourrait obtenir en agissant seul. Le deuxième élément généralise ce raisonnement à des sous-ensembles de joueurs ou des coalitions. Grosso modo, on dira qu'un accord est stable si aucune coalition de joueurs ne peut brandir une revendication crédible contre le partage proposé. Une revendication est crédible si, en plus de mieux convenir à chacun des membres de la coalition qui la met de l'avant, elle est réalisable.

### **La rationalité individuelle dynamique**

Pour un théoricien des jeux, la rationalité individuelle est la seule caractéristique de base, en plus de l'intelligence, que tout joueur doit posséder. L'intelligence n'est pas définie dans un sens élitiste ; au contraire, la théorie des jeux adopte la prémisse que chaque joueur est intelligent et pense que les autres le sont aussi. La rationalité individuelle, contrairement à ce que certains pensent, n'est pas vraiment une hypothèse exigeante. Elle stipule que chaque joueur a comme objectif l'amélioration de son bien-être personnel et prend ses décisions en conséquence. L'hypothèse de rationalité individuelle est nécessaire, au moins dans son sens faible de rationalité bornée, pour construire une théorie valide. En fait, il serait paradoxal d'envisager l'élaboration d'une théorie formelle des jeux où on voudrait prédire les comportements d'agents qui seraient irrationnels.

Dans les jeux statiques, la rationalité individuelle ne pose pas de défi particulier. Comme je l'ai déjà mentionné, si le gain proposé à un joueur est inférieur à celui qu'il obtient en agissant seul, l'accord est tout simplement irrecevable. Soit les autres joueurs font une autre proposition plus accommodante, soit le joueur sort du jeu.

Quand le jeu est dynamique, une difficulté additionnelle surgit. Il faudrait maintenant s'assurer qu'à mesure que le jeu avance dans le temps, chaque joueur continue à trouver son compte. D'où vient cette difficulté ? Pour y répondre, considérons l'exemple de deux pays voisins qui désirent coordonner leurs stratégies en matière d'environnement au cours des dix prochaines années. Ce désir devrait déboucher sur une entente spécifiant les niveaux

individuels d'investissement dans des technologies d'abattement et les niveaux d'émissions de polluants à chacune des périodes subséquentes. L'état du système est représenté par le stock de polluants et le capital d'abattement. L'entente, qui couvre l'ensemble de la période, possède la propriété d'être individuellement rationnelle au sens global, sinon elle ne serait pas acceptée, et toute autre propriété que les joueurs ont bien voulu donner à cette entente.

Analysons maintenant le jeu à une date ultérieure. Chaque joueur fera un calcul simple qui est de comparer son gain, à partir de cet instant jusqu'à la fin de l'horizon, sous les deux régimes possibles : continuer à implanter l'accord coopératif ou adopter un comportement non coopératif. Le sort de l'entente dépendra du résultat de cette comparaison : si le gain non coopératif est plus grand, l'entente sera annulée et on dira qu'elle n'avait pas la propriété de rationalité individuelle dynamique. Je voudrais insister ici sur le fait qu'une entente peut souffrir de ce problème même quand l'évolution de l'état est entièrement prévisible.

Quels sont les mécanismes proposés par les théoriciens des jeux pour faire le design d'ententes durables dans le temps ?

Dans les premières applications des jeux différentiels en sciences sociales, on a fait l'hypothèse que l'accord signé à l'instant initial est irrévocable. En d'autres termes, on a réglé le problème en l'éliminant ! Cette vision, certes très commode, ne résiste pas à un test empirique. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler que la moitié des contrats de mariage deviennent, c'est le moins qu'on puisse dire, sous optimaux à une date ultérieure aux yeux des mêmes joueurs qui les ont jurés irrévocables le jour de la cérémonie ! On pourrait remplacer l'argument d'irrévocabilité par une contrainte sociologique, par exemple, la pression sociale qui ferait en sorte que les joueurs se sentiraient gênés d'être responsable de l'échec de l'entente ou qu'ils tiennent à leur réputation comme des gens d'honneur qui ont le sens de la parole donnée, etc. Ces arguments ne seraient pas empiriquement plus crédibles que l'irrévocabilité et nous éloigneraient du désir de prouver la durabilité en se fondant uniquement sur les éléments du jeu lui-même.

Une deuxième approche est de tenter de construire des accords qui soient des équilibres coopératifs. On se rappelle qu'à l'équilibre aucun joueur n'a intérêt à dévier ou à tricher. Si en plus, l'accord est coopératif, il est alors collectivement optimal. L'équilibre coopératif est ainsi le meilleur des deux mondes.

Pour construire des équilibres coopératifs, on a proposé les concepts de stratégies d'enclenchement et de stratégies incitatives. Dans le cas des stratégies d'enclenchement, on incorpore dans les règles du jeu une procédure qui consiste en l'adoption, par tous les joueurs et pour une durée définie, de mesures de représailles collectives dès qu'on observe un écart

entre le résultat prévu dans l'accord et celui observé. Le concept est de punir la tricherie de telle façon qu'aucun joueur ne sera tenté de dévier des engagements pris lors de l'adhésion à l'entente.

La notion de stratégies d'enclenchement soulève deux questions : Est-il toujours de l'intérêt des joueurs de déclencher les mesures de représailles ? Que se passe-t-il si on n'est pas sûr de l'identité du tricheur ou tout simplement si on n'est pas sûr qu'il y ait eu tricherie ? La réponse à la question de crédibilité des mesures de représailles dépend de nombreux ingrédients et les théoriciens des jeux ont établi des conditions pour que la menace de rétorsion soit effective. Je répondrai à la deuxième question, qui est plus intrigante, en me servant de l'exemple idéalisé de l'OPEP. Ce cartel pétrolier se réunit régulièrement pour déterminer les quotas de production des membres pour une période de temps donnée. Ces quotas affectent le prix du pétrole sur les marchés internationaux et par ricochet les gains des pays du cartel. Supposons qu'à une date donnée on observe un prix de pétrole inférieur à celui prévu par l'entente signée par les membres du cartel. Cette baisse pourrait être attribuée à une surproduction de la part d'un ou de plusieurs membres de l'OPEP ou à une autre raison exogène quelconque. Si la raison de la baisse du prix est connue, le remède l'est aussi. Si, par contre, il y a un doute sur la raison de la baisse du prix, la théorie des jeux recommande que les joueurs déclenchent leurs stratégies de punition, qui consistent dans ce cas à surproduire pour faire baisser encore davantage le prix et priver ainsi les tricheurs éventuels du gain qu'ils auraient pu encaisser en surproduisant.

Un observateur dirait qu'il n'est ni équitable ni optimal de se punir collectivement si on n'est pas certain qu'il y ait eu tricherie. Ce raisonnement est erroné parce qu'il n'accorde pas à la notion de crédibilité de la menace l'importance qui lui revient. Il faut en effet que la menace soit prise au sérieux, sinon elle est totalement inefficace pour prévenir la tricherie. On pourrait certes reprocher à une telle stratégie sa rigidité. En effet, il pourrait arriver qu'un joueur triche parce qu'il s'est trompé dans ses calculs.

Cette critique de rigidité est à mon sens valable mais elle ne remet pas en cause le résultat fondamental. On pourrait éventuellement introduire un facteur de tolérance, mais le choix de le faire ou non devrait dépendre du contexte. On admettra aisément que le cas du prix du pétrole est différent d'un conflit nucléaire. L'équilibre de la dissuasion est basé sur la notion de destruction mutuelle. Que ferait un général si son collègue-ennemi l'implorait par téléphone de ne pas réagir parce qu'il a accroché par erreur le mauvais bouton lançant une ogive nucléaire sur une ville voisine ? Je vous laisse le soin de répondre à votre manière à une telle question.

Dans l'approche des stratégies incitatives, chaque joueur indexe son comportement sur celui de son partenaire et l'en informe. Cette approche est intéressante parce qu'elle offre aux partenaires de démarrer le jeu à partir d'une position coopérative plutôt qu'antagoniste.

Par contre, la rationalité individuelle dynamique de l'équilibre dit incitatif qui résulte de l'implantation de stratégies incitatives ne peut pas être toujours garantie. Pour qu'elle le soit, il faudrait montrer que ces stratégies sont toujours crédibles. Or il est facile de trouver des contre-exemples où un joueur à intérêt à tricher parce qu'il peut établir qu'il serait plus profitable pour son partenaire d'avaler la pilule plutôt que de répliquer. La propriété de rationalité individuelle dynamique de l'équilibre incitatif est à vérifier au cas par cas, ou au mieux en fonction de la structure du jeu.

Pour terminer, on a proposé les concepts de cohérence dynamique et d'agréabilité comme des façons de rendre une entente individuellement rationnelle sans qu'elle ne soit nécessairement un équilibre.

La cohérence dynamique stipule que l'entente doit rester individuellement rationnelle aussi longtemps que les joueurs jouent leurs stratégies coopératives. Dans le langage des jeux différentiels on dira que la réévaluation se fait le long de la trajectoire coopérative de l'état. L'agréabilité exige que le résultat reste individuellement rationnel même si les joueurs n'ont pas honoré leurs engagements avant la date de réévaluation.

La cohérence dynamique et l'agréabilité sont des solutions qui retiennent actuellement l'attention des chercheurs. Dans ce cadre, je me suis particulièrement intéressé à trois questions auxquelles j'ai tenté de répondre avec mes collègues et étudiants.

La première est la caractérisation des liens entre les formes structurelles qu'un jeu différentiel peut revêtir et les concepts d'agréabilité et de cohérence dynamique. La deuxième est relative à la construction d'un mécanisme de paiement latéral qui garantisse la rationalité individuelle dynamique dans ces deux formes de solution. Cette approche a été appliquée à des jeux de pollution unidirectionnelle (les pluies acides en sont un exemple), d'échange d'électricité entre réseaux voisins et dans les circuits de distribution marketing. La dernière question est le design d'une entente qui aurait à la fois la caractéristique de rationalité individuelle dynamique et la propriété de rester équitable pendant toute la durée du jeu. Ce pari a été réussi en prolongeant à un cadre intertemporel la solution d'un jeu coopératif, soit la valeur de Shapley.

## Conclusion

En guise de conclusion, je dirais que le problème de la rationalité individuelle dynamique reste largement ouvert et que plusieurs préoccupations actuelles de la société en sont des champs d'application privilégiés, particulièrement tout ce qui touche au partage de nos ressources communes. Je souhaiterais continuer à contribuer à la recherche dans ce domaine au cours des prochaines années aussi bien au niveau fondamental qu'appliqué.